

DEĞİŞKEN FREKANS KULLANILMASI HALİNDE ELEKTROMANYETİK PARAMETRELERİN DEĞİŞİM ÖZELLİKLERİNİN ELEKTROMANYETİK PROSPEKSİYONDA KULLANILMALARI*

Sırrı KAVLAKOĞLU

Maden Tetkik ve Arama Enstitüsü, Ankara

ÖZET. — Bir elektromanyetik prospeksiyon metodunun, değişken frekans vasıtasıyla karakterize edilebilen muhtelif mineral yataklarının, bilhassa impenye ve sedimenter mineral yataklarının etüdünde, kabili tatbik olabileceği tezin ağırlık noktasını teşkil etmektedir. Bu metot elektromanyetik parametrelerin frekansa bağlı fonksiyonlar olması olayına istinat ettirilmiştir.

Bazı jeolojik bünyelere uygun aşağıdaki şartlar muvacehesinde :

- 1) Jeolojik ortam, dielektrik zarla sarılmış iletken küresel partiküllerden ibarettir.
- 2) Boşlukların ve partiküllerin hacimleri, birim hacme nazaran çok küçüktür.
- 3) Tatbik edilen alan sinuzoidaldir.

Şu neticelere ulaşılmıştır :

$$\mathbf{A}) \nabla \times \vec{\mathbf{H}} = [\sigma(\omega) - i\omega \epsilon(\omega)] \vec{\mathbf{E}}$$

denklemindeki

$$\sigma(\omega) \text{ ve } \epsilon(\omega)$$

parametreleri arasındaki fonksiyonel bağıntı bulunmuş ve açılal frekansın

$$0 < \omega < \infty$$

arasında değişen değerleri için, karteziyen koordinatlarda eksenler

olarak alındığı takdirde, bu fonksiyonun yarı çemberi temsil ettiği gösterilmiştir (Bölüm II Şek. 14).

B) Yukarıda A paragrafındaki analitik bağıntı kullanılmak suretiyle, doğru akım iletkenliğinin bulunabileceği gösterilmiştir.

C) A paragrafındaki çemberin yarı çapı ile birim hacimdeki iletken partiküllerin sayısı arasında bir münasebet ortaya konmuştur.

Yukarıdaki neticelere ulaşıldıktan sonra, bunların bir tatbikatı jeofizik prospeksiyonun iki tabaka probleminde ele alınmıştır.

Satıhtan h yüksekliğinde, içinde değişken akım geçen lüplardan ibaret disk şeklinde bir kaynak alınmış ve bu kaynak muvacehesinde Bölüm III Şek. 15 deki gibi bir tabakalaşma düşünülmüştür.

$$\sigma = 0; \epsilon = \epsilon_0; \mu = \mu_0 \quad [I]$$

$$\sigma = \sigma(\omega, z); \epsilon = \epsilon(\omega, z); \mu = \mu_0 \quad [II]$$

$$\sigma = \bar{\sigma}; \epsilon = \bar{\epsilon}; \mu = \bar{\mu} \quad [III]$$

↓
∞

* 1965 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesinde yapılan doktora tezidir.

Burada,

ϵ_0 ve μ_0 boşluğun dielektrik ve manyetik katsayıları, $\bar{\mu}$; $\bar{\sigma}$; $\bar{\epsilon}$ yan sonsuz olan III üncü tabakanın sabit olarak alınan elektromanyetik parametreleridir.

$$\sigma(\omega, z); \epsilon(\omega, z) \text{ ve } \mu_0$$

Yapılan farzlara uygun olarak ifade edilmiş olan

$$\nabla \times \vec{H} = [\sigma(\omega, z) - i\omega\epsilon(\omega, z)] \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{H}$$

diferansiyel denklemindeki parametrelerdir.

Birçok hallerde tabiattaki jeolojik yapıya uygun olan bu şartlar altında, satıhta yapılan ölçüler sonunda II nci tabakanın herhangi bir derinlikteki,

a) $\sigma(\omega, z)$ ve $\epsilon(\omega, z)$ parametreleri

b) Doğru akım iletkenliği

c) Birim hacimdeki iletken partikül sayısı ile ilgili ifadeler bulunmuş ve bunların tayin edilebileceği gösterilmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmayı yapma imkânını hazırlamak ve çalışmalarım sırasında aydınlatıcı ve yöneltici tavsiyelerde bulunmak suretiyle olumlu sonuçlar almama yardım eden Hocam Prof. Dr. İhsan Özdoğan'a şükranlarımı sunmak isterim.

Enstitü laboratuvarlarından faydalanmam hususunda her türlü kolaylığı sağlayan ve yardımlarını esirgemeyen M.T.A. Enstitüsü Genel Direktörü Doç. Dr. Sadrettin Alpan'a müteşekkirim.

GİRİŞ

Elektromanyetik parametrelerin frekansa bağlı olduğu malumdur. Ancak jeolojik maddelerde iletkenlik katsayısının frekansa bağlı olarak, değişmesinin değerlendirilmesi yenidir.

induced polarizasyonun mevcudiyeti halinde, Madden ve Marshall (1959), Henkel ve Van Nostrand (1957), Henkel (1958), Bhattacharyya ve Morrisson (1963) bazı çalışmalar yapmışlardır.*

A. A. Brant ve L. S. Collett laboratuvar çalışmaları sonucu, bazı jeolojik materyel için iletkenlik katsayısının frekansla değişmesine ait ölçülerini «Overvoltage Research and Geophysical Applications, J. R. Wait, 1959» kitabında yayınlamışlardır.

Bütün bu çalışmalar induced polarization metodunun izahı ve inkişafı için yapılmıştır.

Tezimizde elektromanyetik parametrelerin frekansa bağlı olmaları hadisesi göz önüne alınarak, A. A. Brant ve L. S. Collett'in laboratuvar çalışmalarına paralel olarak çalışılmış ve alınan neticelerin teorik değerlendirilmesi yapılmıştır.

* *Geophysics*, 1957, 1958, 1959, 1963.

Böylece tezimizde ilk defa olarak değişken frekanslı elektromanyetik prospeksiyon metodunun esasları verilmiş olmakta ve buna bağlı olarak, tatbiki jeofizikğin çözülmemiş aşağıdaki iki probleminin,

- Sinüzoidal alan muvacehesinde doğru akım iletkenliğinin bulunmasının
- Jeolojik materyelin iletken partikül sayısı ile ilgili ölçülebilir bir büyüklüğün ortaya konmasının

mümkün olacağı gösterilmiştir.

Bundan başka, bu neticeler gene jeofizikğin önemli olan iki tabaka probleminde ele alınabilmıştır.

Bilindiği gibi, birçok hallerde mineral yatakları jeofizik olarak aşağıdaki gibi ele alınabilir:

$$\sigma = 0, \quad \epsilon = \epsilon_0, \quad \mu = \mu_0 \quad [I]$$

$$\sigma = \sigma(r, z); \quad \epsilon = \epsilon(r, z); \quad \mu = \mu_0 \quad [II]$$

$$\sigma = \bar{\sigma} \text{ sabit}$$

$$\mu = \bar{\mu} \text{ sabit} \quad [III]$$

$$\epsilon = \bar{\epsilon} \text{ sabit}$$



Burada G tabakanının iletkenliğini, s tabakanının dielektriğini ve m de manyetik geçirgenliğini göstermektedir.

1951 de L. B. Slichter** iki tabaka problemine sabit frekanslı elektromanyetik metodun uygulanmasını yapmış ve analitik devamlılığı etüt etmiştir.

Tezde II nci tabaka dielektrik zarla kaplı iletken partiküllerden ibaret olarak farz edilmiş ve değişken frekanslı bir metot kullanılmıştır. Bunun neticesi olarak sedimenter veya emprenye teşekküllü maden yataklarının,

- Derinlik koordinatına ve frekansa bağlı elektromanyetik parametreleri
- Doğru akım iletkenliği
- Herhangi bir derinlikteki birim hacimdeki partikül sayısına ait parametre etüt edilmiş ve bunları veren ifadeler, ölçülebilir büyüklüklere bağlanabilmıştır.

BÖLÜM I

FREKANSIN FONKSİYONLARI OLARAK ELEKTROMANYETİK PARAMETRELER LABORATUVAR ÖLÇÜLERİ VE JEOFİZİK PROSPEKSİYON İÇİN ÇIKARILAN SONUÇLAR

I - 1. Kompleks dielektrik ve kompleks iletkenlik

Sinüzoidal saha halinde ($E = E_0 e^{-j\omega t}$) genel olarak gerek iletkenlik ve gerekse dielektrik parametrelerinin frekansın fonksiyonları olarak aşağıdaki gibi ifade edildikleri malumdur (1, 2,3,4).

** Geophysics, 1951.

$$\hat{\sigma}(\omega) = \sigma_1(\omega) + i \sigma_2(\omega) \quad [\text{I-1.1}]$$

ve

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i \varepsilon_2(\omega) \quad [\text{I-1.2}]$$

1-2. Kompleks permeabilite

Sinüzoidal manyetik alan halinde, \vec{B} ve \vec{H} vektörleri arasında bir faz farkı olacaktır. Bu takdirde aşağıdaki bağıntı yazılabilmektedir (3, 4) :

$$\begin{aligned} \vec{B} e^{-i\omega t} &= \mu \vec{H} e^{-i(\omega t - \varphi)} \\ &= [\mu_1(\omega) + i \mu_2(\omega)] \vec{H} \cdot e^{-i\omega t} \\ \vec{B} &= [\mu_1(\omega) + i \mu_2(\omega)] \vec{H} \end{aligned}$$

Yukarıda olduğu gibi, «alan şiddetine bağlı olmayan permeabiliteler,» «initial permeabilite» ve «reversible permeabilite» ler ele alınmıştır. Bundan böyle kompleks permeabilite bahis konusu olduğu zaman bu iki permeabiliteyi ima etmiş olacağız.

$$\hat{\mu} = \mu_1(\omega) + i \mu_2(\omega)$$

olduğuna göre,

$$\nabla \times \vec{E} = z(\omega) \vec{H}$$

olacaktır.

Burada

$$z = i \omega \hat{\mu} \text{ impediviteyi göstermektedir.}$$

1-3. Admitivite

Eğer alan zamanın bir fonksiyonu ise, akım dansite vektörü \vec{J} ile \vec{E} elektrik vektörü arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur (4) :

$$\vec{J} = \hat{y}(\omega) \vec{E}$$

Yukarıda y admitiviteyi göstermektedir.

Dielektrik ve iletkenlik katsayılarının frekansa bağlı kompleks olduklarını biliyoruz. Genel olarak $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ şeklinde değişiyorsa, kullanacağımız frekanslar için aşağıdaki bağıntılar yazılabilmektedir (4, 5, 6).

Bağıntı 1 ve 2 den

$$\vec{J} = \hat{\sigma} \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{J} = (\hat{\sigma} - i \omega \hat{\varepsilon}) \vec{E},$$

[I-1.1 ve I-1.2 den]

$$\vec{J} = \left[(\sigma_1(\omega) + i \omega \varepsilon_2(\omega)) - i \omega \left(\varepsilon_1 - \frac{\sigma_2(\omega)}{\omega} \right) \right] \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = [\sigma(\omega) - i \omega \varepsilon(\omega)] \cdot \vec{E}$$

[I-3.1]

1-4. ölçü şeması ve kullanılan teknik

İleride, bazı mineral yatakları için kabili tatbik değişken frekanslı elektromanyetik metodun uygulanmasını mümkün kılmak ve tatbik sahalarını işaret etmek bakımından, yaptığımız gerek laboratuvar çalışmalarından, gerekse ölçü neticelerinden bahsetmek faydalı olacaktır.

Numunelerin iletkenliklerinin frekansla değişmelerini tespit gayesiyle aşağıdaki şema kullanılmıştır.

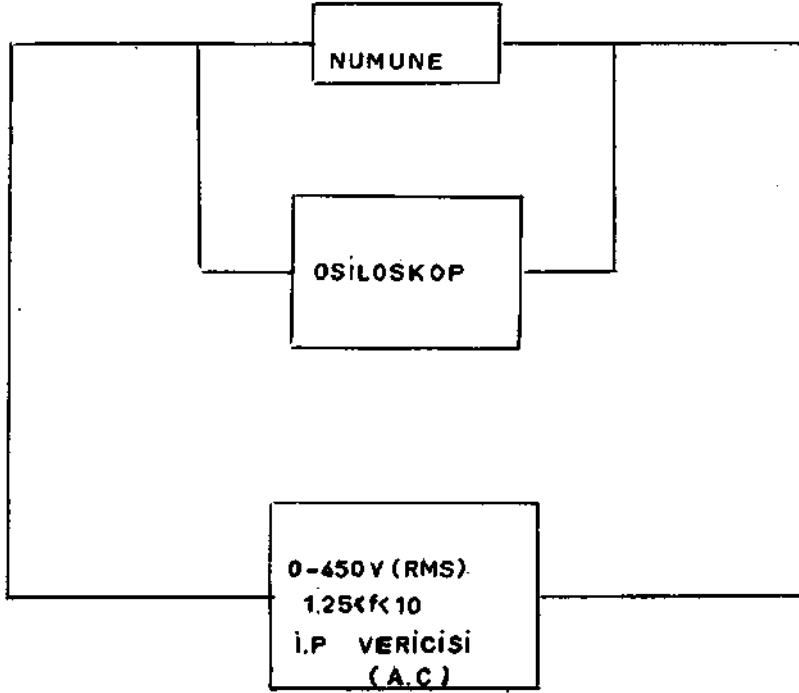
Şek. 1a bu maksatlar için kullanılan blok diyagramı göstermektedir.

Şek. 1b tecrübeler için hazırlanmış numuneyi göstermektedir.

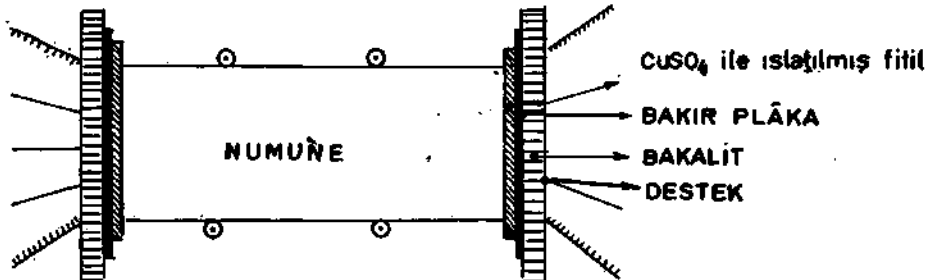
Blok diyagram hakkında not (Şek. 1 a)

I.P. vericisi: McPhar Model 2005.

Giriş voltajı: 110V. (RMS); 350-480 cps dir (motor).



Şek. 1a - Blok diyagram



Şek. 1b

Çıkış voltajı: 0 - 450V 1.25; 2.5; 5 ve 10 cps ye ayarlanabilir.

Çıkış akımı : 0.3 A, 1 A, 3A pozisyonludur ve numune devresinden geçen akım vericinin üstündeki ampermetre ile okunmaktadır.

Oscilloscope : Solartron, Type CD. 523S2.

1-5. Muhtelif numuneler için $\sigma = \sigma(\omega)$ grafikleri

$\sigma = \sigma(\omega)$ grafikleri, gerek laboratuvarımızda yapılan ölçüler sonunda ve gerekse literatürden tezimize uygun olarak faydalanmak suretiyle çizilmiştir.

Bunları ileriki maksatlarımıza uygun bir tertipte koyuyoruz (Şek. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11).

1-6. Ölçü sonuçlarının değerlendirilmesi

1-5. te verilen grafiklerden aşağıdaki sonuçlara varılmıştır:

1) $\epsilon_2(\omega)$ r y e l i n iletkenliğine karakteristik bir terim olarak ilâve edilmektedir.

2) İletken partiküller ihtiva etmeyen gerek sedimenter, gerekse igneous ve metamorphic bölgelerdeki vasatların iletkenliklerinin frekansa göre değişim gradientleri çok küçüktür.

3) İletken partikül ihtiva eden gerek sedimenter ve gerekse igneous ve metamorphic bölgelerdeki vasatların iletkenliklerinin frekansa göre değişim gradientleri çok büyüktür. Bu gradiyentin değişimi iletken partiküllerin birim hacimdeki sayısı ile ilgilidir.

1-7. Netice

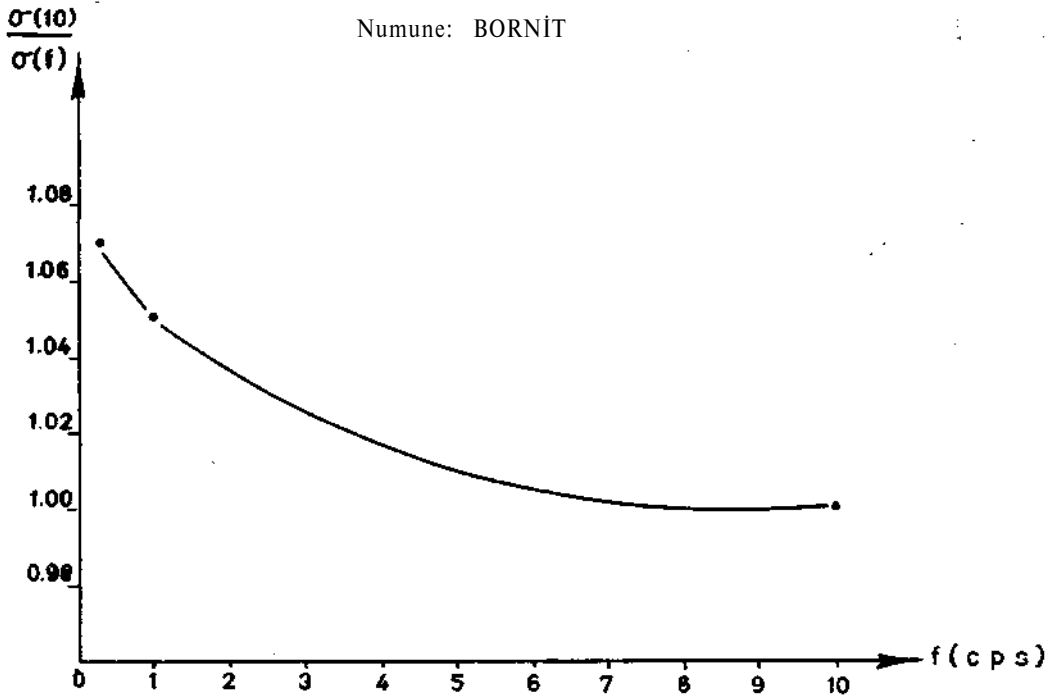
Birinci bölümde elektromanyetik parametrelerin gerek teorik ve gerekse laboratuvar tecrübeleri neticesinde frekansın fonksiyonları olarak ele alınmaları gerektiği gösterilmiş ve şu neticelere varılmıştır:

1) İletken partikül ihtiva eden gerek sedimenter ve gerekse igneous ve metamorphic bölgelerdeki vasatların iletkenlikleri frekansın fonksiyonu olarak değişmektedir ve gradiyentin değişimi birim hacimdeki partikül sayısı ile ilgilidir.

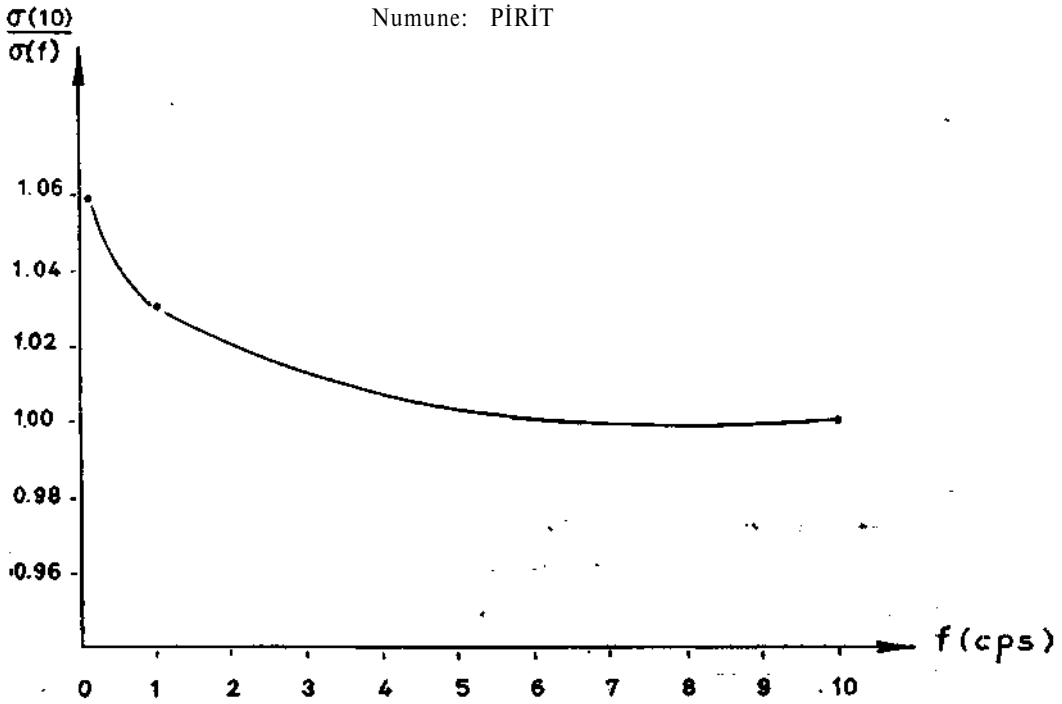
2) Materyele ait iletkenliğin frekansa bağlı olarak değişme özelliği cisimleri karakterize etmektedir.

Referanslar

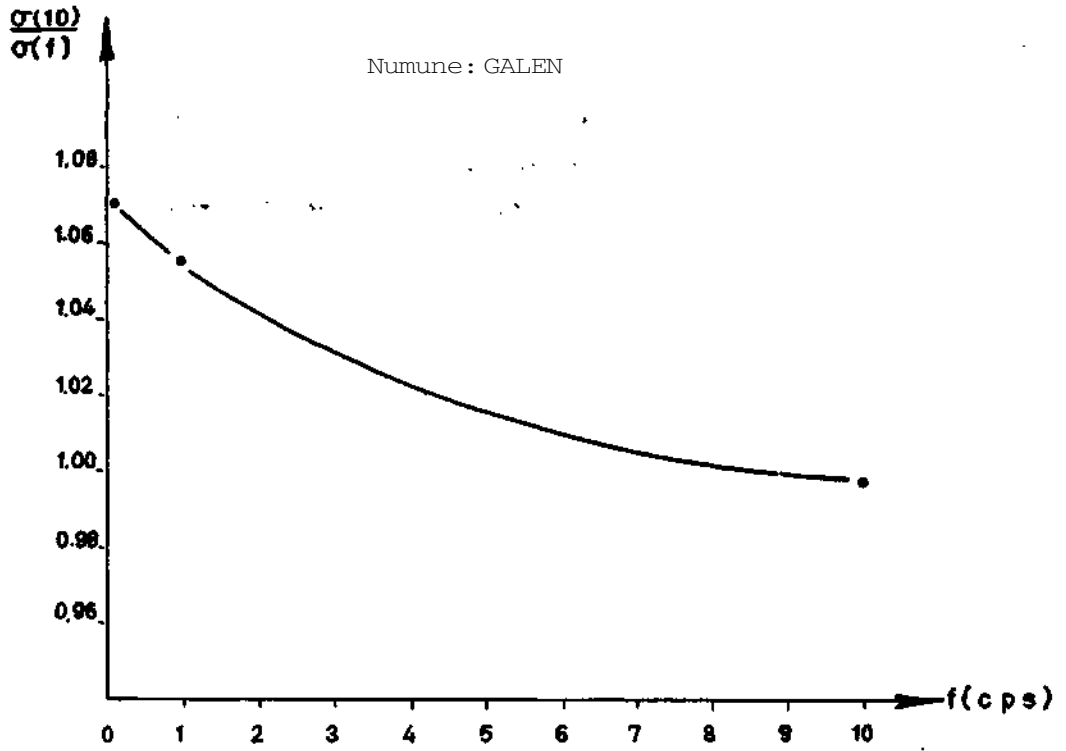
- 1 — FRÖHLICH, H. (1949) : Theory of dielectrics. *Oxford, at the Clarendon Press.*
- 2 — HIPPEL, A.R.V. (1954): Dielectrics and waves. *John Willey & Sons., Inc., new york Chapman & Hall, Ltd., London.*
- 3 — HIPPEL, A.R.V. (1954) : Dielectrics materials and applications
- 4 — HARRINGTON, R.F. (1961) : Time - harmonic çlectromagnetic field. *McGraw-Hill Book Company, Inc., New york, Toronto, London.*
- 5 — GRANT, F.A. (1958) : *Journal of Applied Physics*, v. 29.
- 6 — WAIT, J.R. (1959) : Overvoltage research and geophysical applications *Pergamon Press, London.*



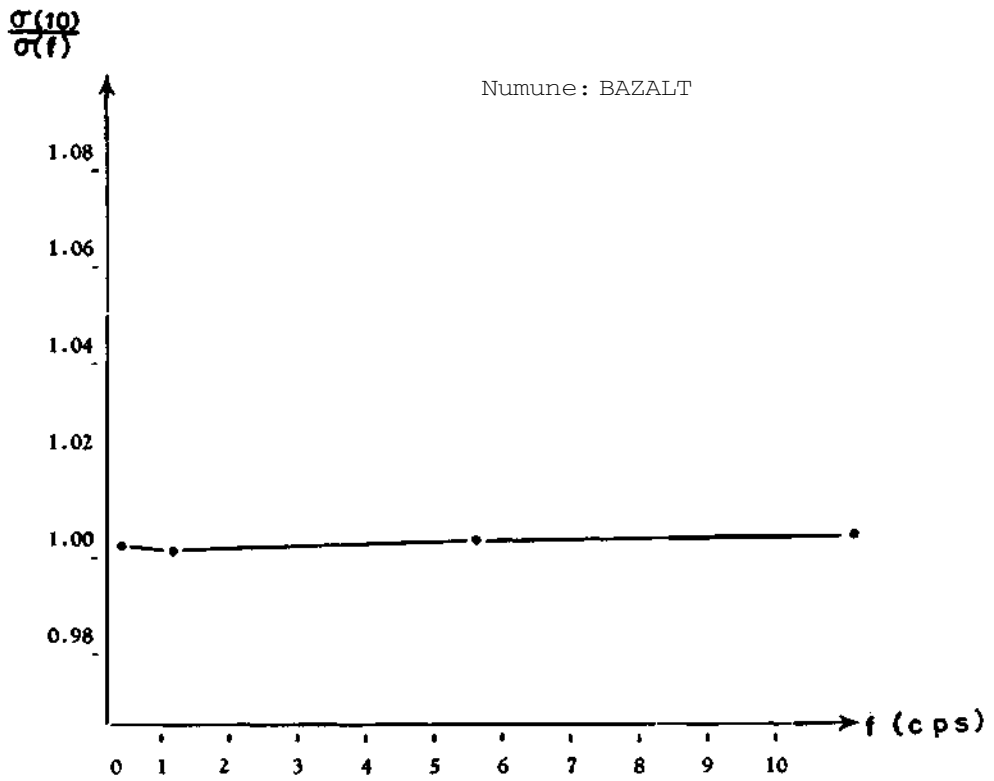
Şek. 2



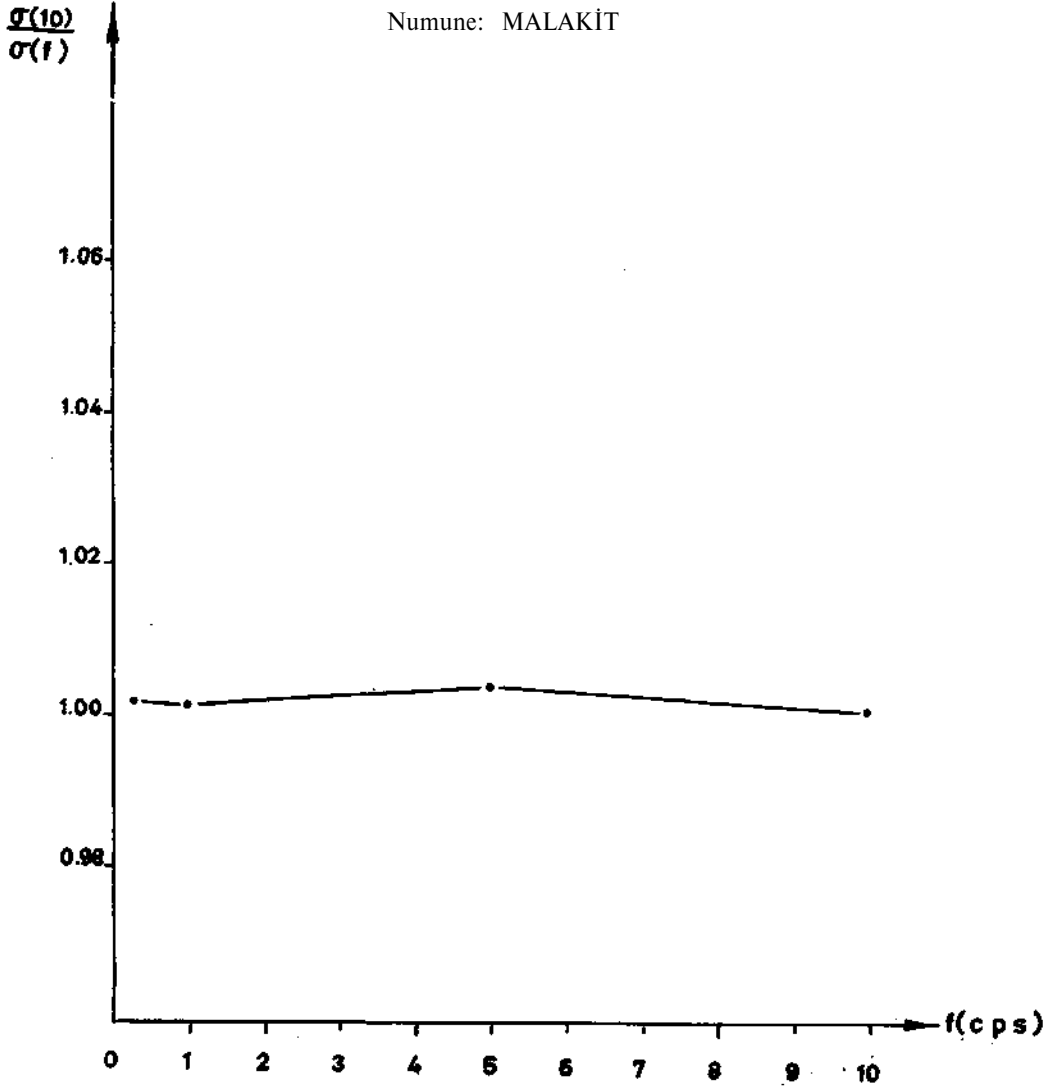
Şek. 3



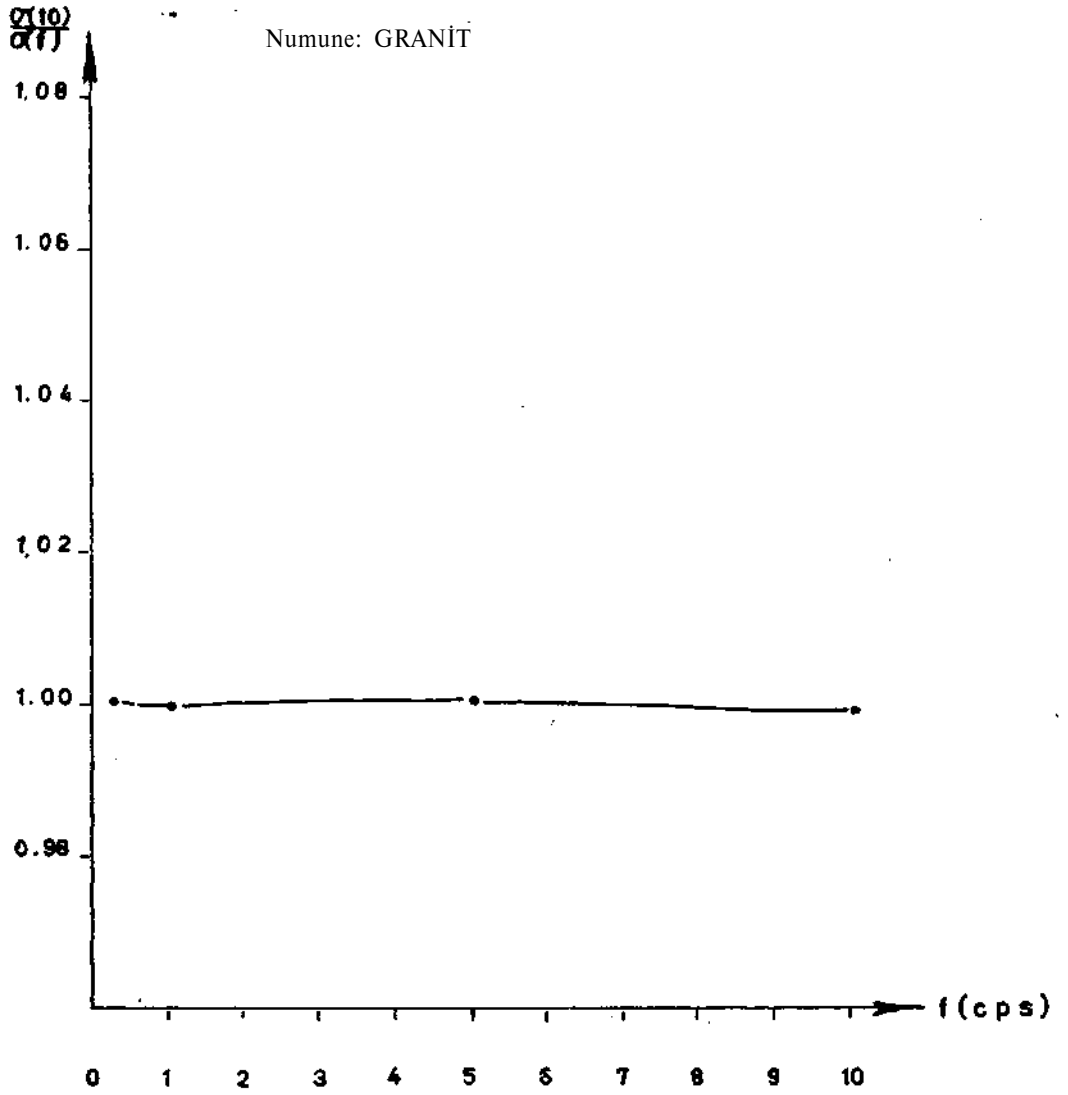
Şek. 4



Şek. 5



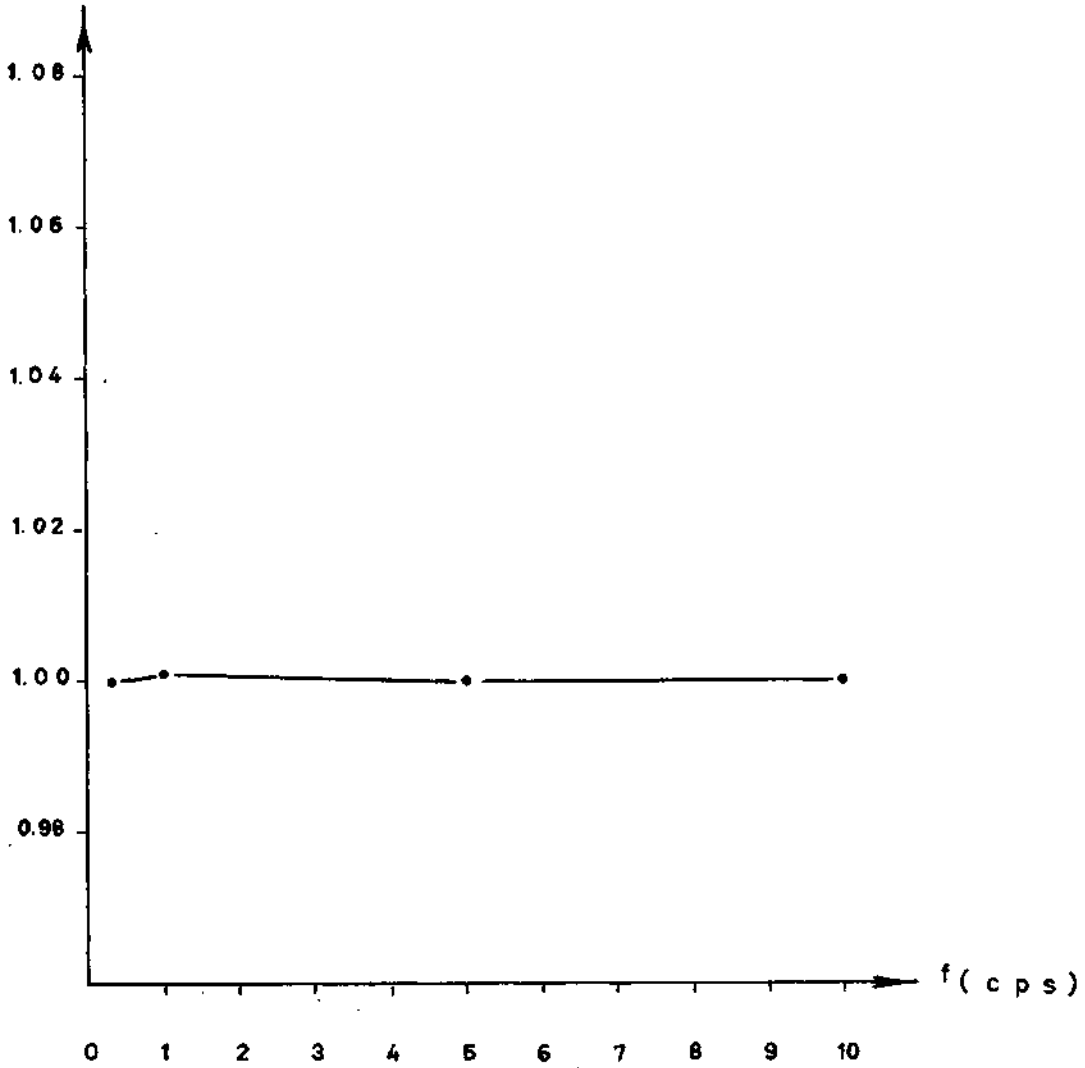
Şek. 6



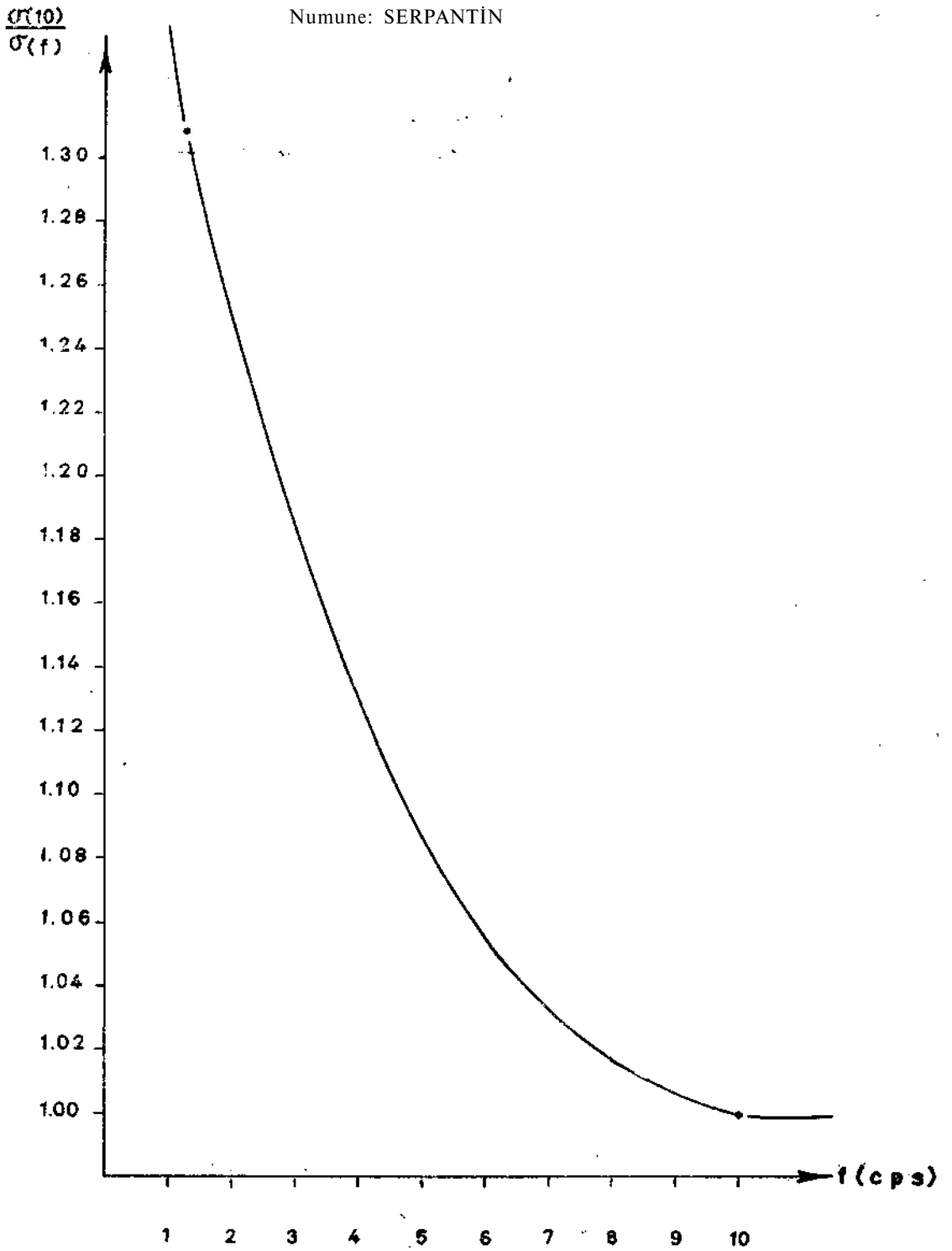
Şek. 7

$$\frac{\sigma(10)}{\sigma(f)}$$

Numune: KALKER



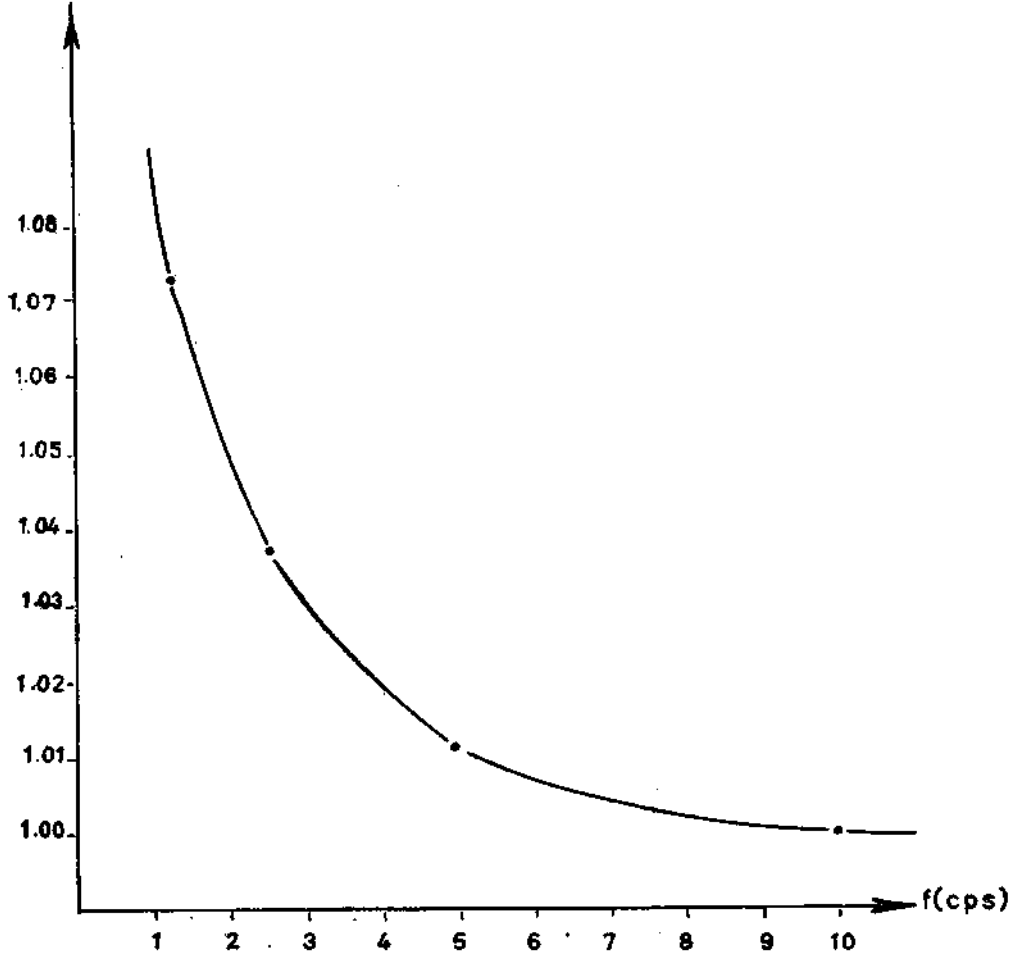
Şek. 8



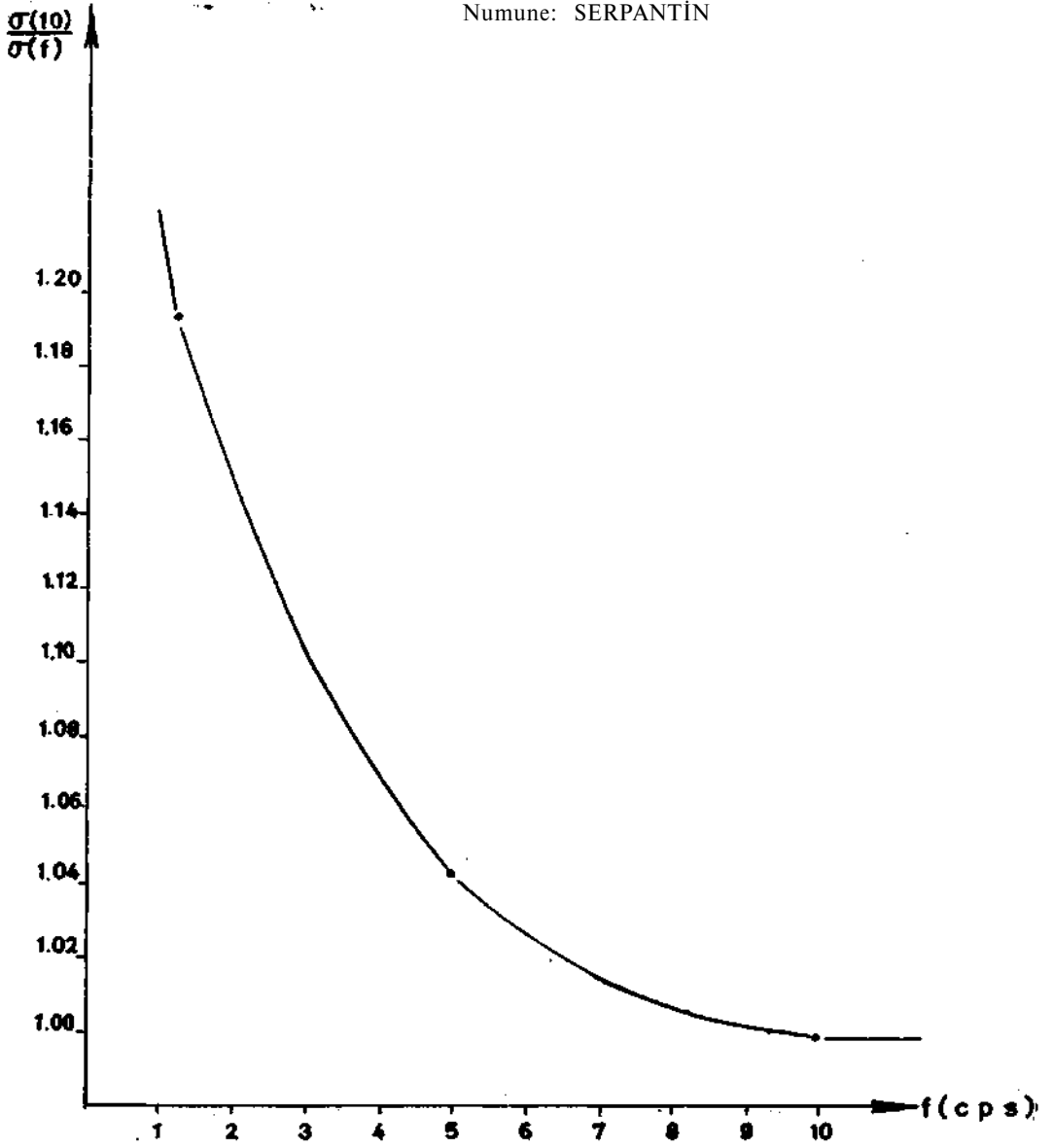
Şek. 9

$\frac{\sigma(10)}{\sigma(f)}$

Numune: KROM



Şek. 10



Şek. 11

BÖLÜM II

DEĞİŞKEN FREKANSLI ELEKTROMANYETİK SAHA MUVACEHESİNDE DOĞRU AKIM İLETKENLİĞİNİ VE BİRİM HACİMDEKİ İLETKEN PARTİKÜL SAYISINI VEREN İFADELERİN BULUNMASI

II-1. Admitivitinin reel ve imajiner kısımları frekansın ve (z) uzaysal koordinatının fonksiyonları oldukları haller

$$\sigma(\omega, z) - \sigma_0(z) = \alpha(z) \cdot \beta(\omega)$$

$$\varepsilon(\omega, z) = \alpha'(z) \cdot \beta'(\omega)$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Farz ediyoruz ki, elektromanyetik saha

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad [\text{II-1.1}]$$

şeklinde değişmektedir.

Denklem [I-3.1] i aşağıdaki gibi yazalım :

$$\nabla \times \vec{H} = [\sigma(\omega, z) - i\omega\varepsilon(\omega, z)] \vec{E} \quad [\text{II-1.2}]$$

Yukarıdaki denklemin her iki tarafının diverjanını alalım.

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = \nabla \cdot [\sigma(\omega, z) - i\omega\varepsilon(\omega, z)] \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = 0$$

olduğundan,

$$\nabla \cdot (\sigma(\omega, z) - i\omega\varepsilon(\omega, z)) \vec{E} = 0$$

olacaktır.

Bunu da,

$$\nabla \cdot \sigma \vec{E} - i\omega \nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = 0 \text{ şeklinde yazalım.}$$

Denklem [II-1. 1] e uygun olarak ve $\nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = 0$ dan

$$\nabla \cdot \sigma \vec{E}_0 = 0 \quad [\text{II-1.3}]$$

bulunur.

Diğer taraftan $\omega=0$ için

$$\nabla \cdot \sigma_0 \vec{E}_0 = 0 \text{ dir.}$$

$$\text{Böylece, } \nabla \cdot (\sigma - \sigma_0) \vec{E}_0 = 0$$

olur.

$$\text{Şimdi, } \nabla \cdot (U\vec{V}) = \vec{V} \cdot \nabla U + U \nabla \cdot \vec{V}$$

Bilinen vektörel bağıntısını kullanacak olursak,

$$\nabla \cdot (\sigma - \sigma_0) \vec{E}_0 = \vec{E}_0 \cdot \nabla (\sigma - \sigma_0) + (\sigma - \sigma_0) \nabla \cdot \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_o \nabla (\sigma - \sigma_o) + (\sigma - \sigma_o) \nabla \cdot \vec{E}_o = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_o = - \frac{1}{\sigma - \sigma_o} \vec{E}_o \cdot \nabla (\sigma - \sigma_o)$$

bulunur.

$$\vec{E}_o = E_{ox} \vec{i} + E_{oy} \vec{j} + E_{oz} \vec{k}$$

ve

$$\nabla (\sigma - \sigma_o) = \frac{\partial (\sigma - \sigma_o)}{\partial z} \vec{k}$$

olduklarına göre,

$$\nabla \cdot \vec{E}_o = - \frac{1}{\sigma - \sigma_o} \frac{\partial (\sigma - \sigma_o)}{\partial z} E_{oz} \quad [\text{II-1.4}]$$

Aynı şekilde,

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = 0$$

için de benzer durum vardır.

O takdirde,

$$\nabla \cdot \vec{E}_o = - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} E_{oz} \quad [\text{II-1.5}]$$

olacaktır.

Yukarıdaki [II-1. 4] ve [II-1. 5] münasebetleri, \vec{E}_o sadece uzaysal koordinatların fonksiyonu olduğundan,

$$\frac{1}{E_{oz}} \nabla \cdot \vec{E}_o = - \frac{1}{\sigma - \sigma_o} \frac{\partial (\sigma - \sigma_o)}{\partial z} = f(z) \quad [\text{II-1.6}]$$

bağıntısını verirler.

$$\frac{1}{E_{oz}} \nabla \cdot E_o = - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = f(z) \quad [\text{II-1.7}]$$

diyebiliriz.

Burada $f(z)$ sadece (z) değişkeninin fonksiyonu olup, reel bir fonksiyondur.

[1.6-1.7] denklemlerini göz önüne alacak olursak,

$$- \frac{1}{\sigma - \sigma_o} \frac{\partial (\sigma - \sigma_o)}{\partial z} = f(z) \quad [\text{II-1. 8}]$$

$$- \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = f(z)$$

ifadelerini bulmuş oluruz.

Yeniden 1.8 bağıntılarına dönelim.

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = - f(z)$$

görüldüğü gibi, ifadenin sağ tarafı sadece (z) nin fonksiyonudur. Açısal frekansın fonksiyonu değildir. Böyle olunca,

$$\epsilon = \alpha'(z) \cdot \beta'(\omega) \quad [\text{II-1. 9}]$$

şeklinde yazılabileceğini bulmuş oluruz.

Zira, sadece bu takdirde 1.7 ifadesi gerçekleştirilebilir. Şöyleki,

$$\frac{1}{\alpha'\beta'} \cdot \frac{\partial (\alpha' \cdot \beta')}{\partial z} = \frac{1}{\alpha'} \frac{d\alpha'}{dz} = -f(z)$$

aynı şekilde

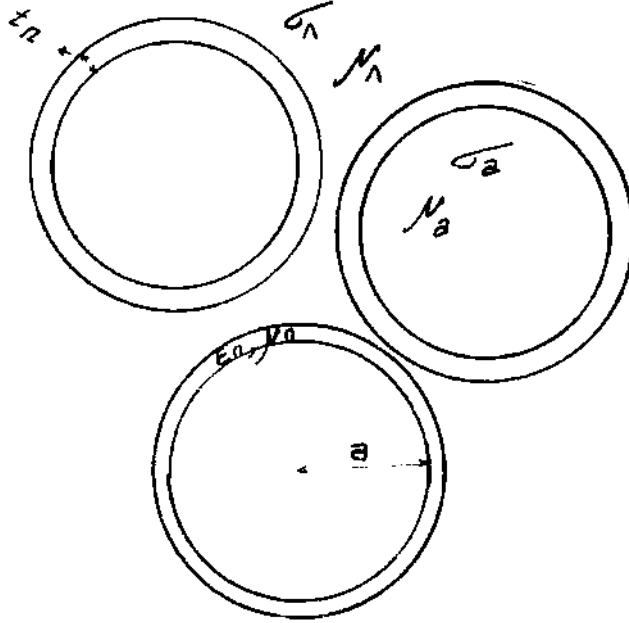
$$\sigma - \sigma_0 = \alpha(z) \cdot \beta(\omega) \quad [\text{II-1. 10}]$$

olduğu kolayca görülebilir.

II - 2. Sadece açısal frekansa bağlı olan $\beta(\omega)$ ve $\beta'(\omega)$ fonksiyonları hakkında

Burada jeolojik şartlara tecrübelerimize uygun ve paragraf II-1 deki teorik neticeleri verecek kabuller yapılacaktır.

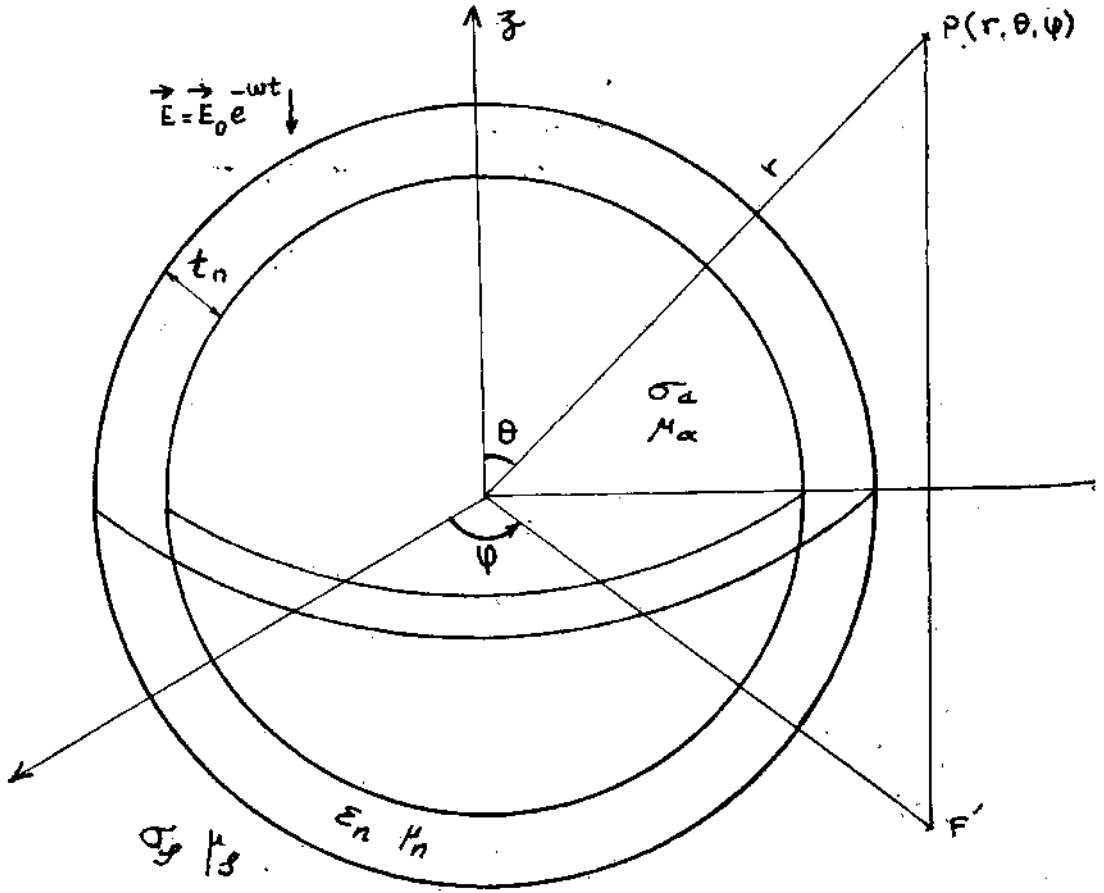
Umumiyetle bazı maden yataklarını, manyetik geçirgenliği ve iletkenliği olan küresel partiküllerin meydana getirdiği bir ortam olarak düşünmek mümkündür (Şek. 12).



Şek. 12

Partiküllerin iletkenliği σ_a manyetik permeabilitesi μ_a olsun. Partikülleri saran ince zarın dielektrik parametresi ϵ_n ve permeabilitesi μ_n ve bu zarın kalınlığı t_n partikülleri saran ortamında iletkenliği σ_s ve permeabilitesi μ_s partiküllerin yarı çapı da (a) olsun.

Şimdi $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ alanını göz önüne alarak, yukarıda tarif edilen bir partikülün, herhangi bir P noktasındaki potansiyelini hesap edelim (2, 3) (Şek. 13).



Şek. 13

Dalga boyuna nazaran küçük olan bir mesafedeki P noktasındaki elektrik potansiyeli ψ ve içerideki potansiyeli de ψ_a ile gösterelim.

$$\sigma_s \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\} r = a + t_n = \sigma_a \left. \frac{\partial \psi_a}{\partial r} \right\} r = a$$

ve

$$\psi + \frac{t_n \sigma_s}{i \varepsilon_n \omega} \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\} r = a + t_n = \psi_a \left. \right\} r = a$$

$t_n \ll a$ olduğu zaman

potansiyeli

$$\psi = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \left[\frac{1 - \delta}{1 + 2\delta} \right] \cos \theta$$

burada

$$\delta = \frac{\sigma_s}{\sigma_a} - \frac{t_n \sigma_s}{i \varepsilon_n \omega a} \text{ dir.}$$

Tatbik edilen birim saha için birim hacmin dipol momentini A ise,

$$A = 3 v \frac{1 - \delta}{1 + 2 \delta} \text{ dir (Stratton, s. 206).}$$

Burada, v , birim hacimdeki toplam partiküllerin hacmi

$$v = \frac{4}{3} \pi a^3 N \text{ dir.}$$

N birim hacimdeki partikül sayısıdır.

Derhal,

$$\sigma(\omega) - i \omega \varepsilon(\omega) = \sigma_s \left(1 + \frac{A}{1 - \frac{A}{3}} \right) \quad [\text{II-2.1}]$$

bağıntısını yazabiliriz (Fröhlich, 1949) (4, 2).

Buradan aşağıdaki ifadelere varmak mümkündür. Reel kısım için,

$$\frac{\sigma(\omega)}{\sigma_s} \cong 1 + 3 v \cdot \frac{1 - 2 \left(\frac{t_n \sigma_s}{\omega \varepsilon_n a} \right)^2}{1 + 4 \left(\frac{t_n \sigma_s}{\omega \varepsilon_n a} \right)^2}$$

ve imajiner kısım için,

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\sigma_s} \cong 9 v \cdot \frac{\frac{t_n \sigma_s}{\omega \varepsilon_n a}}{1 + 4 \left(\frac{t_n \sigma_s}{\omega \varepsilon_n a} \right)^2}$$

olur.

Burada $t_n \ll a$; $\sigma_s \ll \sigma_a$; $v \ll 1$ kabul edilmişlerdir.

Biz tezimizde ε ; μ ve σ parametreleri bakımından lineer bir domende meşgul olacağız. Ancak, bu domende bahsi geçen t_n ; σ_s ; ε_n ve a büyüklükleri sabit olarak alabiliriz.

Böylece iletkenlik ve dielektrik parametreleri sadece açısal frekansa ve v ye bağlı olacaktır.

Denklemleri basitleştirmek gayesiyle

$$\frac{t_n \sigma_s}{\varepsilon_n a} = \frac{1}{2\Gamma} \quad [\text{II-2.2}]$$

diyelim.

$$\frac{\sigma(\omega)}{\sigma_s} \cong 1 + 3 v \frac{1 - 2 \frac{1}{4\omega^2 \Gamma^2}}{1 + \frac{1}{\omega^2 \Gamma^2}}$$

$$\frac{\omega \varepsilon(\omega)}{\sigma_s} \cong 9 \nu \cdot \frac{\frac{1}{2 \omega T}}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}}$$

olacaklardır. Buradan

$$\sigma(\omega) \cong \sigma_s + 3 \nu \sigma_s \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 T^2}}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}}$$

[II-2.3]

ve

$$\omega \varepsilon(\omega) \cong \frac{9}{2} \nu \sigma_s \cdot \frac{\frac{1}{\omega T}}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}}$$

[II-2.4]

olurlar.

Manyetik geçirgenlik parametresi için de benzer muhakemeyi yapmak mümkündür.

II-3. Değişken akım kullanması halinde doğru akım iletkenliğinin bulunabileceğinin ispatı

Frekansa tabi iletkenlik parametresi için bulduğumuz 2.3 ifadesini ele alalım:

$$\sigma(\omega) = \sigma_s + 3 \nu \sigma_s \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 T^2}}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}}$$

$$\omega = 0$$

için

$$\sigma(0) = \sigma_0 = \sigma_s + 3 \nu \sigma_s \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\sigma_0 = \sigma_s - \frac{3}{2} \nu \sigma_s$$

doğru akım iletkenliği yukarıdaki şekilde yazılmış olur.

$$\sigma(\omega) - \sigma_0 \text{ farkını}$$

teşkil edelim.

$$\sigma(\omega) - \sigma_0 = \sigma_s + 3 \nu \sigma_s \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 T^2}}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}} - \sigma_s + \frac{3}{2} \nu \sigma_s$$

$$\sigma(\omega) - \sigma_0 = \frac{3 \nu - \sigma_s - \frac{3}{2} \nu \sigma_s \frac{1}{\omega^2 T^2} + \frac{3}{2} \sigma_s \nu + \frac{3}{2} \nu \sigma_s \frac{1}{\omega^2 T^2}}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}}$$

$$\sigma(\omega) - \sigma_0 = \frac{\frac{9}{2} \cdot \sigma_s v}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}} \quad [\text{II-3.1}]$$

Diğer taraftan,

$$\omega \varepsilon(\omega) = \frac{\frac{9}{2} \sigma_s v \frac{1}{\omega T}}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}} \quad [\text{II-3.2}]$$

idi.

Jeofizik aramalarda jeolojik zonların yapılarına uygun kabuller yapılmaktadır. Biz de burada v nin z uzaysal koordinatının sürekli bir fonksiyonu olduğunu kabul edeceğiz.

Bu takdirde, II-3.1 ve II-3.2 ifadeleri

$$\sigma(\omega, z) - \sigma_0(z) = 4.5 \sigma_s v(z) \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}} \quad [\text{II-3.3}]$$

$$\omega \varepsilon(\omega, z) = 4.5 \sigma_s v(z) \frac{\frac{1}{\omega T}}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}} \quad [\text{II-3.4}]$$

şeklinde yazılabilecektir.

[II-3.3] ve [II-3.4] ifadelerinin paragraf II-1. de elde edilen

$$\sigma(\omega, z) - \sigma_0(z) = \alpha(z) \cdot \beta(\omega)$$

$$\omega \varepsilon(\omega, z) = \alpha'(z) \cdot \beta'(\omega)$$

bağıntılarıyla mutabakat halinde olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi v nin $v = v(z_1)$ şeklindeki bir değeri için karteziyen koordinatlarda eksenler $\sigma(\omega, z_1)$ ve $\omega \varepsilon(\omega, z_1)$ olduğuna göre,

$$\omega \varepsilon(\omega, z_1) = f[\sigma(\omega, z_1)]$$

[II-3.3] ve [II-3.4] denklemleri vasıtasıyla, bu fonksiyonun eğrisini çizecek olursak (Şek. 14),

açısal frekansının

$$0 < \omega < \infty$$

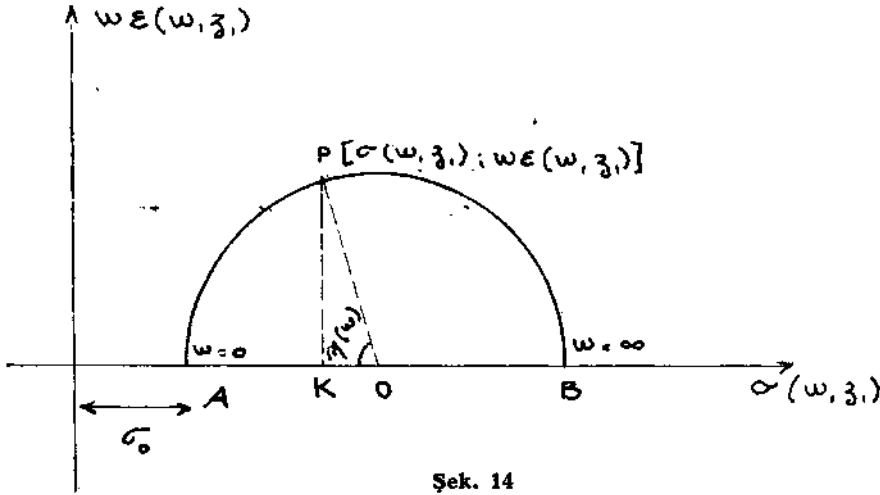
değerleri için eğri bir yarım çember olacaktır (Şek. 14).

A noktasına ait koordinat değerleri

$$A(\sigma_0; 0)$$

dir.

Burada çok önemli bir neticeye ulaşılmış oluyoruz.



Şek. 14

«Eğer muhtelif frekanslar için $\sigma(\omega)$ ve $\omega \varepsilon(\omega)$ değerleri ölçülebiliyorsa», grafik yolu ile σ_0 değerinin bulunabileceği ispatlanmış olmaktadır.

Bu da tatbiki jeofiziğin en önemli problemlerinden birinin halli demektir.

II-4. İletken partikül sayısının tayin edilebileceğinin ispatı

Formül [II-3.3] ve [II-3.4] e geri dönelim ve onları aşağıdaki gibi yazalım.

$$\sigma - \sigma_0 - 2.25 \sigma_s \nu = 2.25 \sigma_s \nu \left[\frac{2}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}} - 1 \right]$$

$$\omega \varepsilon = 2.25 \sigma_s \nu \frac{2 \frac{1}{\omega T}}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}}$$

$$\frac{2 \frac{1}{\omega T}}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}} = \sin \eta(\omega)$$

diyelim.

Bu takdirde,

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}} - 1 = \cos \eta(\omega)$$

olacaktır

ve

$$\sigma - (\sigma_0 + 2.25 \sigma_s \nu) = 2.25 \sigma_s \nu \cos \eta \quad [\text{II-4.1}]$$

$$\omega \varepsilon = 2.25 \sigma_s \nu \cdot \sin \eta \quad [\text{II-4.2}]$$

bağıntılarına varılmış olur.

Şek. 14 teki çemberin yarıçapının

$$\overline{OP} = 2.25 \sigma, v$$

olduğu bulunmuş olur.

Burada çok önemli ikinci bir neticeye ulaşılmış oluyoruz.

«Eğer muhtelif frekanslar için $\sigma(\omega)$ ve $\varepsilon(\omega)$ değerleri ölçülebiliyorsa, grafik yoluyla iletken partikül sayısı bir büyüklüğe bağlanabilmektedir.»

Bu da tatbiki jeofiziğin önemli problemlerinden bir diğerinin halli demektir.

II-5. Netice

Burada, birinci bölümdeki tecrübi sonuçlara istinaden çıkarılan analitik ifadeler aşağıdaki iki önemli fizik hadiseyi ortaya koymuştur.

1) Sinisoidal alan kullanıldığı ve elektromanyetik parametreler, açısız frekanstan başka sadece (z) uzaysal koordinatının fonksiyonları oldukları takdirde, yani :

$$\sigma = \sigma(\omega, z)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega, z)$$

şeklinde iseler,

$$\sigma(\omega, z) = \alpha(z) \cdot \beta(\omega)$$

ve

$$\varepsilon(\omega, z) = \alpha'(z) \beta'(\omega)$$

şeklinde oldukları gösterilmiş ve jeolojik şartlara uygun kabuller muvacehesinde $\beta(\omega)$; $\beta'(\omega)$

fonksiyonlarının şekilleri tayin edilmiş ve $z = z_1$ değeri için

$$\varepsilon(\omega, z_1) = F[\sigma(\omega, z_1)]$$

analitik bağıntısından eksenleri $\varepsilon(\omega, z_1)$ ve $\sigma(\omega, z_1)$ olan karteziyen koordinatlarıdaki grafiğinden doğru akım iletkenliğinin bulunabileceği gösterilmiştir.

2) Aynı analitik ifadenin karteziyen koordinatlarında,

$$0 < \omega < \infty$$

arasındaki değerleri için temsil ettiği yarı çemberin nısıf kutrunun numuneye ait birim hacimdeki partikül sayısı ile orantılı olduğu ispatlanmıştır.

Referanslar

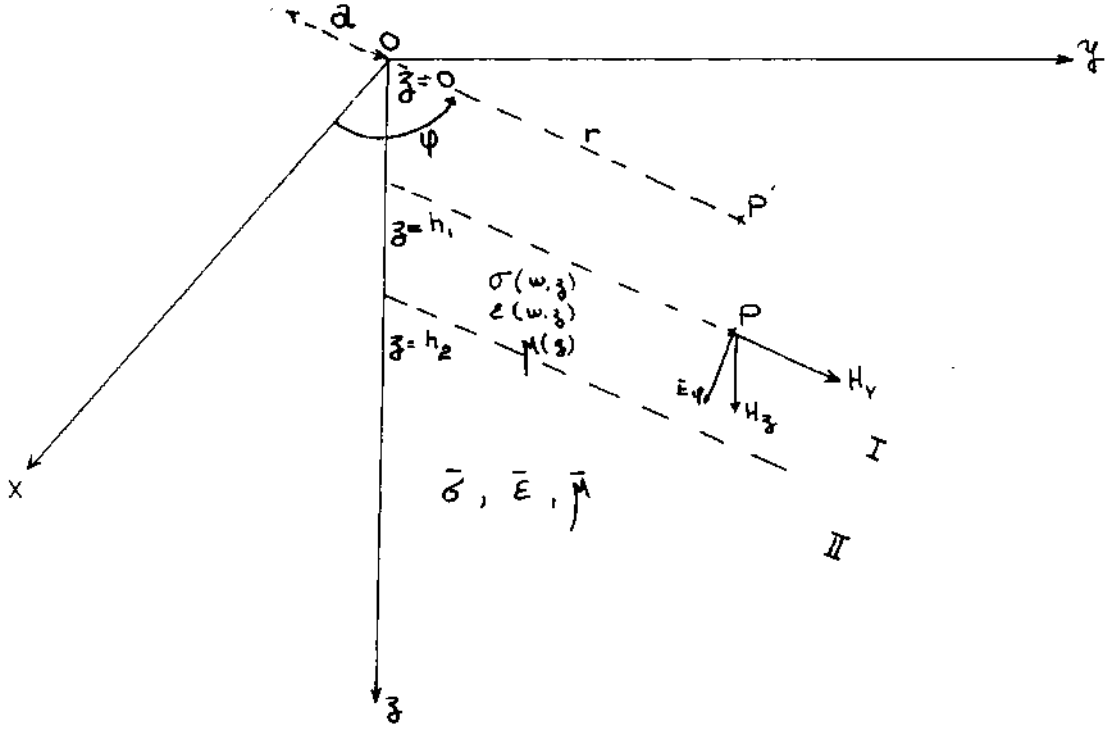
- 1 — HARRINGTON, R.F. (1961): Time - Harmonic electromagnetic field. *Mc Graw-Hill Book Company, Inc.) New York.*
- 2 — WAIT, J.R. (1959): Overvoltage Research and geophysical applications *Pergamon Press, London.*
- 3 — STRATTON, J.A. (1941): Electromagnetic theory.
- 4 — FRÖLICH, H. (1949) : Theory of dielectrics.
- 5 — WHITTAKER, K.T. (1940) : A Course of modern analysis *Cambridge, at the University Press.*

BÖLÜM III

DEĞİŞKEN FREKANSLI ELEKTROMANYETİK METOT, İKİ TABAKA
PROBLEMİ, İLETKEN PARTİKÜL SAYISININ, DOĞRU AKIM
İLETKENLİĞİNİN BULUNMASI

III-1. İki tabaka problemi

Tabakalardan biri sonsuz olan iki tabakalı bir vasat alalım. Birinci tabaka $z=h_1$ den $z=h_2$ ye kadar, diğeri de, $z=h_2$ den $z=\infty$ kadar uzanmaktadırlar (Şek. 15). z eksenini aşağı doğru pozitif olarak alınmıştır.



Şek. 15

Birinci tabaka (I), Bölüm II-2 deki tarife uygun olarak, ϵ ; σ ve μ parametrelerini ihtiva etmektedir. Bu parametreler z derinlik koordinatının ve (μ hariç) ω açısal frekansının fonksiyonlarıdır. Bunlar z derinlik koordinatının sürekli fonksiyonlarıdır.

İkinci sonsuz tabakaya ait elektromanyetik parametrelerin sabit olduklarını kabul ediyoruz.

III-2. Değişken frekanslı elektromanyetik metodun esasları ve uygulanması

Sahayı yaratan kaynak, a' yarıçapı sonlu alınabilen, disk şeklinde ve içinden değişik frekanslı alternatif akım geçen luplardan ibaret olsun. Bu kaynak $z=0$ da sathı paralel konmuş olsun ve sathı $z=h_1$ de bulunsun. Sınırlı t a b $z \neq h_2$ d e bitmektedir.

Alıcı bobinlerle H_z ve H , bileşenleri $z=h_1$ sathı üzerindeki P noktasında ölçülmektedir. (Şek. 15).

III-3. Çözüm için silindirik simetrisinin kullanılması

Silindirik simetriden dolayı silindirik koordinatları seçiyoruz. Bunlar $r; \varphi; z$ olsunlar. Yukarıdaki konuma göre, H_φ , E_r ve E_z bileşenleri her yerde sıfır olacaktır (Şek. 15).

Burada iki tabaka için invers problemi ele alan L. B. Slichter'in çözüm tarzından faydalanılmıştır (3).

Maxwell denklemlerini bölüm II-2 ye göre yazalım. Burada MKS birimlerini kullanacağız (2).

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \sigma(\omega, z) \vec{E} + \epsilon(\omega, z) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \epsilon(\omega, z) \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad [\text{III } 3.1]$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu(z) \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mu(z) \vec{H} = 0$$

İlerideki araştırmalarımızda ele alacağımız μ parametresi, tezin inkişafını sağlaması bakımından $\mu = \mu(z)$ şeklinde alınmıştır.

E_φ alanını veren diferansiyel denklemi bulalım.

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\left(\nabla \mu \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\left(\mu \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \times \nabla \mu \right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \vec{H} \right) + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \times \nabla \mu$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - \left(-\frac{1}{\mu} \times \nabla \times \vec{E} \right) \times \nabla \mu$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{\mu} \nabla \mu \times \nabla \times \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

E yerine $E_0 (-i\omega t)$ koyarak,

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \bar{\mu}^{-1} \nabla \mu \times \nabla \times \vec{E} + i\omega \mu \sigma \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \\ \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \bar{\mu}^{-1} \nabla \mu \times \nabla \times \vec{E} + i\omega \mu (\sigma - i\omega \epsilon) \vec{E} \\ \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \text{ olduğundan,}\end{aligned}\quad [\text{III-3.2}]$$

III-3.2 denklemi

$$-\nabla^2 \vec{E} = \bar{\mu}^{-1} \nabla \mu \times \nabla \times \vec{E} + i\omega \mu (\sigma - i\omega \epsilon) \vec{E}$$

şeklinde yazılır.

Burada $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ dir. Zira,

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = 0$$

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla \epsilon = 0$$

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E} + (E_r \vec{U}_r + E_\varphi \vec{U}_\varphi + E_z \vec{U}_z) \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \vec{U}_z = 0$$

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E} + E_z \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0$$

$$E_z = 0$$

olduğundan,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad [\text{III-3.3}]$$

bulunur.

III-3.2 denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$-\nabla^2 \vec{E} = \bar{\mu}^{-1} \nabla \mu \times \nabla \times \vec{E} + i\omega \mu (\sigma - i\omega \epsilon) \vec{E} \quad [\text{III-3.4}]$$

III-3.4 denklemini $E_\varphi \vec{U}_\varphi$ vektöriyel bileşenine göre düzenleyelim (2).

$$(-\nabla^2 E)_\varphi = \bar{\mu}^{-1} (\nabla \mu \times \nabla \times \vec{E})_\varphi + i\omega \mu (\sigma - i\omega \epsilon) E_\varphi \vec{U}_\varphi \quad [\text{III-3.5}]$$

$$\nabla \cdot \nabla \vec{E} = \nabla^2 \vec{E} = \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial^2 E_n}{\partial (z^1)^2} + \frac{\partial^2 E_n}{\partial (z^2)^2} + \frac{\partial^2 E_n}{\partial (z^3)^2} \right) \vec{U}_n$$

$$\nabla^2 E_z \vec{U}_z = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial (x^3)^2} \right)$$

Yukarıdaki vektöriyel bağıntıyı silindirik koordinatlara uygularsak,

$$\nabla^2 E_\varphi = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} \right\}$$

olacaktır.

φ göre değişme sıfırdır. Yani $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ dir.

Bu takdirde,

$$\nabla^2 E_\varphi = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} \right) \right\}$$

$$(\nabla\mu \times \nabla \times \vec{E})_{\varphi} = \left\{ \frac{\partial\mu}{\partial z} \vec{U}_z \times \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z} \right) \vec{U}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{U}_{\varphi} \right] + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_{\varphi}) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial\varphi} \right) \vec{U}_z \right\}$$

$$(\nabla\mu \times \nabla \times \vec{E})_{\varphi} = \frac{\partial\mu}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z} \right) \vec{U}_{\varphi} - \frac{\partial\mu}{\partial z} \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{U}_r$$

$$(\nabla\mu \times \nabla \times \vec{E})_{\varphi} = \frac{\partial\mu}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z} \right) \vec{U}_{\varphi}$$

ve $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$

olduğundan,

$$(\nabla\mu \times \nabla \times \vec{E})_{\varphi} = \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z} \vec{U}_{\varphi}$$

bulunur.

Bulduklarımızı [III-3.5] denkleminde yerine koyacak olursak,

$$-\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r} \right) - \frac{E_{\varphi}}{r^2} + \frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial z^2} \right\} \vec{U}_{\varphi} = -\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z} \vec{U}_{\varphi}$$

$$+ i\omega\mu (\sigma - i\omega\epsilon) E_{\varphi} \vec{U}_{\varphi}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r} \right) + \frac{E_{\varphi}}{r^2} - \frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial z^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z} + i\omega\mu (\sigma - i\omega\epsilon) E_{\varphi}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r} - \frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{E_{\varphi}}{r^2} - \frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial z^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z} + i\omega\mu (\sigma - i\omega\epsilon) E_{\varphi}$$

[III-3.6]

$$\frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r} + \frac{E_{\varphi}}{r^2} + i\omega\mu (\sigma - i\omega\epsilon) E_{\varphi} = 0 \quad [\text{II.3.7}]$$

ve $E_{\varphi} = R(r) \cdot Z(z)$

koyalım.

$$\frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z} = R \frac{dZ}{dz}; \quad \frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial z^2} = R \frac{d^2 Z}{dz^2}; \quad \frac{dZ}{dz} = Z'$$

$$\frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r} = Z \frac{\partial R}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial r^2} = Z \frac{\partial^2 R}{\partial r^2}; \quad \frac{dR}{dr} = R'$$

$$RZ'' - \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} RZ' + R''Z + \frac{1}{r} R'Z + \frac{1}{r^2} RZ + i\omega\mu (\sigma - i\omega\epsilon) R \cdot Z = 0$$

denklemi elde olunur. Her iki tarafını $R \cdot Z$ ile bölelim.

$$\frac{Z''}{Z} - \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{Z'}{Z} + \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} + i\omega\mu (\sigma - i\omega\epsilon) = 0$$

$$\frac{Z''}{Z} - \frac{-1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{Z'}{Z} + i\omega\mu(\sigma - i\omega\varepsilon) = -\frac{R''}{R} - \frac{1}{r} \frac{R'}{R} - \frac{1}{r^2} = l^2$$

$$\frac{Z''}{Z} - \frac{-1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{Z'}{Z} + i\omega\mu(\sigma - i\omega\varepsilon) - l^2 = 0$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} + l^2 = 0$$

$$Z'' - \frac{-1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} Z' - \left[l^2 - i\omega\mu(\sigma - i\omega\varepsilon) \right] Z = 0 \quad [\text{III} - 3.8]$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' + (l^2 + r^{-2}) R = 0 \quad [\text{III} - 3.9]$$

[III-3.9] denkleminin çözümü, ki o orijinde sonlu kalacaktır,

$$R = \mathcal{J}_1(lr)$$

olur.

III-4 $\left[Z'' - \frac{-1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} Z' - (l^2 - i\omega\varepsilon) \right] Z = 0$ denkleminin çözümü

$z = 0$, $z = h_1$ ve $z = h_2$ düzlemleri vasıtasıyla dört bölge birbirlerinden ayrılmıştır. Her bölge için [III-3.8] diferansiyel denkleminin yaklaşık elemanter çözümleri şöyle olacaktır:

a) $z \leq 0$ olduğu zaman,

$$\mu = \mu_0; \varepsilon = \varepsilon_0; \sigma = 0$$

dır.

$$Z'' - \left\{ l^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \right\} Z = 0 \quad [\text{III} - 4.1]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = D$$

lineer operatörünü kullanalım.

$$[D^2 - (l^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0)] Z = 0$$

$$Z_1 = B e^{-(l^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0)^{1/2} z} + A_1 e^{(l^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0)^{1/2} z} \quad [\text{III} - 4.2]$$

olacaktır.

$$z \leq 0$$

$$B = 0$$

olduğu için,

$$Z_1 = A_1(l) e^{(l^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0)^{1/2} z} \quad [\text{III} - 4.3]$$

olmalıdır.

$$\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = k_0^2$$

diyelim.

Burada

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{henry / m}$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \quad \text{farad / m}$$

değerlerindedir.

k_0^2 oldukça küçük bir sayıdır.

$$Z_1 = A_1(l) e^{(l^2 - k_0^2)^{1/2} z}$$

$$l^2 < k_0^2$$

ise

$$Z_1 = A_1(l) e^{-i(k_0^2 - l^2)^{1/2} z}$$

olacaktır.

Bu takdirde dalganın propagasyonunun yukarı doğru olduğu zamanki hali görürüz.

$$l^2 > k_0^2$$

ise

$$Z_1 = A_1(l) e^{(l^2 - k_0^2)^{1/2} z} \quad [\text{III-4.4}]$$

olacaktır.

Amplitüt $-z$ doğrultusunda eksponansiyel olarak azalır.

b) $0 \leq z \leq h_1$ tabakası için

[III-4.1] denkleminde elde edilmiş olan genel çözüm [III-4.2] den

$$Z_2 = A_2(l) \cosh K_0 z + \beta_2(l) \sinh K_0 z \text{ yazılabilir.} \quad [\text{III-4.5}]$$

$$\text{Burada } K_0 = (l^2 - k_0^2)^{1/2}$$

dir.

c) $h_1 \leq z \leq h_2$ tabakası için

Bu tabakanın özelliği bilinmemektedir. [III-3.8] denkleminin iki lineer müstakil çözümü M_1 ; M_2 olsunlar.

Bu takdirde,

$$Z_3 = A_3 M_1 + B_3 M_2 \quad [\text{III-4.6}]$$

olacaktır.

d) $z \geq h_2$ olduğu zaman

[III-3.8] denkleminin yaklaşık çözümü :

$$Z_4 = A_4(l) e^{-\bar{K}z} \quad [\text{III-4.7}]$$

olacaktır.

$$\bar{K} = \omega^2 \bar{\mu} \bar{\epsilon} + j\omega \bar{\mu} \bar{\sigma}$$

Yukarıdaki dört vasat için çözümü aşağıdaki şekilde yazmak mümkün olabilecektir :

$$\vec{E}_i = \int_0^{\infty} \mathcal{Y}_1(lr) Z_i(l, z) dl \quad [\text{III-4.9}]$$

$i = 1, 2, 3, 4$

z_i [III-4.3], [4.5], [4.6] ve [4.7] denklemleri vasıtasıyla tarif edilmiştir.

Burada 4.9 entegralinin yakınsak olduğunu farz ediyoruz.

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad [\text{III-4.10}]$$

$$\vec{E} = \int_0^{\infty} \mathcal{Y}_1(lr) Z_i(l, z) dl \quad [\text{III-4.11}]$$

bilinen ifadelerden aşağıdaki ifadeleri yazmak mümkün olur.

$$H_r = -\frac{1}{i} \omega^{-1} \mu^{-1} \int_0^{\infty} \mathcal{Y}_1(lr) Z_i(l, z) dl \quad [\text{III-4.12}]$$

$$H_z = \frac{1}{i} \omega^{-1} \mu^{-1} \int_0^{\infty} \mathcal{Y}_0(lr) \dot{Z}_i dl \quad [\text{III-4.13}]$$

Burada, $\dot{Z}_i = \frac{dZ_i}{dz}$ şeklindedir.

III-5. Sınır şartları

$z = 0$, $z = h_1$ ve $z = h_2$ satırlarında, aşağıdaki iki bağımsız şart sağlanır.

1) \vec{E}_φ elektrik alanı bu satırlarda süreklidir.

2) H_r manyetik alanı kaynak hariç yukarıdaki satırlar üzerinde her yerde süreklidir. Kaynakta, satır-akım dansitesine eşittir. Bu da $m(r)$ olsun.

$z = 0$ da \vec{E}_φ elektrik saha vektörü sürekli olarak değiştiğinden,

$$\int_0^{\infty} \mathcal{Y}_1(lr) (A_2 - A_1) dl = 0 \quad \text{olacaktır.} \quad [\text{III-5.1}]$$

Buradan,

$$A_2 - A_1 = 0$$

bulunur.

Yukarıdaki denklem 5.1, (r) den müstakil olarak sağlanmaktadır. Diğer taraftan [4.9], [4.4] ve [4.6] denklemlerini kullanarak, kaynakta H_r münasebetini veren şartın aşağıdaki gibi olması icap edecektir.

$$-\frac{1}{i} \omega^{-1} \mu^{-1} \int_0^{\infty} (B_2 - A_1) (l^2 - k_0^2)^{1/2} \mathcal{Y}_1(lr) dl = m(r) \quad \text{or } (r/a) \quad [\text{III-5.2}]$$

$$- i \omega^{-1} \mu^{-1} \int_0^{\infty} (B_2 - A_1) (l^2 - k_0^2)^{1/2} \mathcal{Y}_1(lr) dl = 0 \quad r = a$$

Burada a diskin (kaynak) yarıçapıdır.

Yukarıdaki [III-5.1] ve [III-5.2] şartları $z = h_1$ ve $z = h_2$ sınırları için ayrı ayrı yazılabilir. $Z = h_2$ için iki denklem beş adet bilinmeyen ihtiva edecektir.

Bunlar :

$$\mu_1(l, H); \mu_2(l, H)$$

fonksiyonları ve bunların z değişkenine göre olan $\dot{\mu}_1, \dot{\mu}_2$ türetilmiş fonksiyonlar ve ayrıca $A_4(l)$ bilinmeyen sabitedir. Bu sebeple, bu iki sınır şartı problemimize yardımcı olmazlar. $z = h_1$ de, karşılıklı olarak dört tane şart denklemi yazılabilir. İkisi, elektromanyetik sahanın bu sınırdaki sürekli olmasından dolayıdır. Bunlar, [III-5.1] ve [III-5.2] ifadelerine karşılık olanlardır. Diğer iki şart, satıhta müşahade edilen H_r ve H_z değerlerinden elde edilen ve ileride inkişaf ettirilecek olanlardır.

İki süreklilik şartı şunlardır:

$$Z_2(l, h_1) - Z_3(l, h_1) = 0 \quad \text{[III-5.3]}$$

$$\mu_{s1} \dot{Z}_2(l, h_1) - \mu_{s2} \dot{Z}_3(l, h_1) = 0 \quad \text{[III-5.4]}$$

Burada, μ_{s1} hemen yeryüzünün altındaki permeabilitedir.

Diğer iki ilâve şart, Fourier-Bessel inversion teoremini (3) kullanmak suretiyle [III-4.12] ve [III-4.13] denklemlerinin inversionu olacaktır. Şu halde,

$$\dot{Z}_i(l, z) = -i\omega\mu l \int_0^{\infty} \mathcal{Y}_1(lr) H_r(r, z) r dr \quad \text{[III-5.5]}$$

$$Z_i(l, z) = +i\omega\mu \int_0^{\infty} \mathcal{Y}_0(lr) H_z(r, z) r dr \quad \text{[III-5.6]}$$

Burada, $i = 1, 2, 3, 4$ değerlerini alacaktır (4).

Satıhta $H_r(r, h_1)$ ve $H_z(r, h_2)$ bilinmektedir. Bundan dolayı $Z_i(l, h_1)$ ve $\dot{Z}_i(l, h_1)$ ($i = 2, 3$) fonksiyonlarına bilinen fonksiyonlar nazariyle bakabiliriz.

III-6. «Kernel» fonksiyonunun kullanılması

$K_3(l, h_1, \omega)$ Kernel fonksiyonu, aşağıda olduğu gibi tarif edilir (5).

$$K_3(l, h_1, \omega) = - \frac{\dot{Z}_3(l, h_1, \omega)}{l Z_3(l, h_1, \omega)} \quad \text{[III-6.1]}$$

[III-5.5] ve [III-5.6] denklemleri göstermektedir ki, sahada yapılabilen müşahedelerden, Kernel fonksiyonu tayin edilebilir. Aynı şekilde bunun tersi de varit olacaktır.

Kernel aşağıdaki şekilde tarif edildiğine göre,

$$-\frac{\dot{Z}_3}{IZ_3} = K_3$$

Bunu [III-3.8] denkleminde yerine koyalım.

$$(IK_3)' = -\frac{Z_3'' \cdot Z_3 - Z_3' \cdot Z_3'}{Z_3^2} = -\frac{Z_3''}{Z_3} + \frac{Z_3'}{Z_3^2} \quad [\text{III-6.2}]$$

$$\frac{Z_3''}{Z_3} = -(IK_3)' + \frac{Z_3'}{Z_3^2}$$

[III-6.1] denkleminde

$$\frac{Z_3''}{Z_3} = -(IK_3)' + (IK_3)^2$$

bulunur.

[III-3.8] denklemini şöyle yazalım:

$$\frac{Z''}{Z} - \frac{\mu'}{\mu} \frac{Z'}{Z} - \left\{ I^2 - (i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\epsilon) \right\} = 0 \quad [\text{III-6.3}]$$

Şimdi [III-6.1] ve [III-6.2] ifadelerini yukarıdaki [III-6.3] denkleminde yerine koyalım.

$$-(IK_3)' + (IK_3)^2 + \frac{\mu'}{\mu} (IK_3) - \left[I^2 - (i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\epsilon) \right] = 0 \quad [\text{III-6.4}]$$

[III-6.4] diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem, Kernel (K_3) fonksiyonu ile materyelin özellikleri arasındaki bağıntıyı verir.

[III-6.4] diferansiyel denkleminin çözümüne girişmeden önce, diferansiyel denklemin çözümünde permeabilite bahis konusu olacağından, permeabilite hakkında bazı bilgilere sahip olmamız gerekmektedir.

Bundan önceki Bölüm I de permeabilite etüt edilmiştir. Biz burada permeabilitenin sadece, z derinlik koordinatının sürekli fonksiyonu olduğunu kabul edeceğiz.

Bu son denklemi aşağıdaki gibi tanzim edelim.

$$(i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\epsilon) = (IK_3)' - (IK_3)^2 - \frac{\mu'}{\mu} IK_3 + I^2 \quad [\text{III - 6.5}]$$

olacaktır.

$z > h_2$ için, yukarıdaki denklemin [III - 6.5] çözümü,

$$Z_4 = A_4 e^{(I^2 - \bar{K}^2)^{1/2} z}$$

denkleme uygun olacaktır. Bu denkleme ait karşılıklı Kernel

$$K_4 = \frac{\dot{Z}_4}{IZ_4} = (\mu - \bar{K}^2)^{1/2} l^{-1} = \left[1 - (i \omega \mu \sigma + \omega^2 \mu \epsilon) l^2 \right]^{1/2}$$

olacaktır.

Bunu / nin büyük değerleri için seriye açalım :

$$K_4 \approx 1 - \frac{1}{2} (e + i s) l^2 - \frac{1}{8} (e + i s)^2 l^4 - \frac{1}{16} (e + i s) l^6 \dots$$

$$\omega \mu \sigma = s ; \omega^2 \mu \epsilon = e$$

Bu netice buna karşılık K_3 Kernel'i için (3,4)

$$K_3 \sim 1 + r_1 l^1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^i$$

şeklinde olacaktır.

Burada r_i ve b_i kat sayıları sadece z ve açısal frekansın fonksiyonlarıdır. / yi ihtiva etmezler.

Yukarıda bulduğumuz [III-6.5] denkleminde [III-6.7] ifadesini yerine koyalım. Elde edilen ifadeyi / nin kuvvetlerine göre tanzim edelim :

$$i K_3 = l + r_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i-1}$$

$$(i K_3)^1 = r_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i-1}$$

$$(i K_3)^2 = l^2 + r_1^2 + \left[\sum_{i=2}^{\infty} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i-1} \right]^2 + 2 l r_1$$

$$+ 2 l \sum_{i=2}^{\infty} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i-1} + 2 r_1 \sum_{i=2}^{\infty} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i-1}$$

$$i \omega \mu \sigma + \omega^2 \mu \epsilon = \dot{r}_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\dot{r}_i - \frac{1}{2} j \dot{b}_{i-1} \right) l^{i-1} - 2 l r_1 -$$

$$2 l \sum_{i=2}^{\infty} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i-1} - 2 r_1 \sum_{i=2}^{\infty} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i-1}$$

$$= \frac{\mu'}{\mu} l - \frac{\mu'}{\mu} r_1 - \frac{\mu'}{\mu} \sum_{i=2}^{\infty} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i-1} + l^2 -$$

$$2 l \sum_{i=2}^{\infty} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i-1} = 2 \left(r_2 - \frac{1}{2} j b_1 \right) + 2 \sum_{i=2}^{\infty} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i-1}$$

$$i \omega \mu \sigma + \omega^2 \mu \epsilon = \dot{r}_1 - r_1^2 - 2 \left(r_2 - \frac{1}{2} j b_1 \right) - \frac{\mu'}{\mu} r_1 - 2 l r_1 - \frac{\mu'}{\mu} l$$

$$+ \frac{\infty}{2} \left[\left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) - 2 r_1 \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) - \frac{\mu'}{\mu} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) - 2 \left(r_{i+1} - \frac{1}{2} j b_i \right) \right] l^{i+1} - \left[\frac{\infty}{2} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i+1} \right]^2$$

$$\sum a_n \cdot \sum b_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots \\ = \sum C_n \quad \text{olduğuna göre,}$$

$$C_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

$$\left[\frac{\infty}{2} \left(r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} \right) l^{i+1} \right]^2$$

$$r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1} = a_i$$

şöylece,

$$\left[\sum a_i l^{i+1} \right]^2 = l^2 \left(\sum \frac{a_i}{l^i} \right)^2 = l^2 \sum \frac{a_i}{l^i} \cdot \sum \frac{a_i}{l^i}$$

$$\sum \frac{a_i}{l^i} \cdot \sum \frac{a_i}{l^i} = \frac{a_2}{l^2} \cdot \frac{a_2}{l^2} + \left(\frac{a_2}{l^2} \cdot \frac{a_3}{l^3} + \frac{a_3}{l^3} \cdot \frac{a_2}{l^2} \right) + \dots$$

$$= \frac{1}{l^2} \sum_2^{\infty} (a_2 a_i + a_3 a_{i-1} + \dots + a_i a_2) l^i$$

$$l^2 \left(\sum_2^{\infty} \frac{a_i}{l^i} \right)^2 = \sum_2^{\infty} (a_2 a_i + a_3 a_{i-1} + \dots + a_i a_2) l^i \\ = \sum_3^{\infty} (a_2 a_{i-1} + a_3 a_{i-2} + \dots + a_{i-1} a_2) l^{i+1}$$

$$i \omega \mu \sigma + \omega^2 \mu \varepsilon = -2 r_1 l - \frac{\mu'}{\mu} l \\ + \left[r_1 - r_1^2 - 2 \left(r_2 - \frac{1}{2} j b_1 \right) - \frac{\mu'}{\mu} r_1 \right] l^0 \\ + \left(a_2 - 2 r_1 a_2 - \frac{\mu'}{\mu} a_2 - 2 a_3 \right) l^{-1} \\ + \frac{\infty}{3} \left\{ a_i - 2 r a_i - \frac{\mu'}{\mu} a_i - 2 a_{i+1} \right. \\ \left. - (a_2 a_{i-1} + a_3 a_{i-2} + \dots + a_{i-1} a_2) \right\} l^{i+1}$$

Özdeşliğin sol tarafı / parametresine tabi olmadığı için, sağ taraftaki terimlerde / nin katsayıları sıfır olacaktır. Böylece aşağıdaki dört bağıntı bulunmuş olur. Bu dört bağıntı vasıtasıyla, elektromanyetik parametreler, $z = h_1$ de bilinen r_i ve b_i fonksiyonlarına bağlanmış olacaktır.

$$2 r_1 - \frac{\mu'}{\mu} = 0$$

$$\dot{r}_1 - r_1^2 - 2 \left(r_2 - j \frac{1}{2} b_1 \right) - \frac{\mu'}{\mu} r_1 = i \omega \mu \sigma + \omega^2 \mu \varepsilon$$

$$\dot{a}_2 - 2 r_1 a_2 - \frac{\mu'}{\mu} a_2 - 2 a_3 = 0$$

$$\dot{a}_i - 2 r_1 a_i - \frac{\mu'}{\mu} a_i - 2 a_{i+1} - (a_2 a_{i-1} + a_3 a_{i-2} + \dots + a_{i-1} a_2) = 0$$

$$i = 3, 4, 5, \dots$$

Yukarıdaki dört bağıntıyı yeniden tanzim edelim. Bilindiği gibi burada,

$$a_2 = r_2 - \frac{1}{2} j b_1 \quad \dot{a}_2 = \dot{r}_2 - \frac{1}{2} j \dot{b}_1$$

$$a_i = r_i - \frac{1}{2} j b_{i-1}$$

şeklinindedir.

$$-2 r_1 - \frac{\mu'}{\mu} = 0$$

$$\dot{r}_1 - r_1^2 - 2 a_2 - \frac{\mu'}{\mu} r_1 = i \omega \mu \sigma + \omega^2 \mu \varepsilon \quad [\text{III} - 6.9]$$

$$\dot{a}_2 - 2 a_3 = 0$$

$$\dot{a}_i - 2 a_{i+1} - (a_2 a_{i-1} + a_3 a_{i-2} + \dots + a_{i-1} a_2) = 0$$

$$i = 3, 4, 5, \dots$$

[III - 6.9] denklemindeki,

$$a_2 a_{i-1} + a_3 a_{i-2} + \dots + a_{i-1} a_2$$

ifadesinin aşağıdaki gibi mütalaa edileceğini biliyoruz. Ancak burada bir kere daha hatırlatmayı faydalı buluyoruz.

Meselâ, $i = 3$ için

$$a_2 a_2 = a_2^2$$

şeklinindedir.

$i = 4$ için

$$a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_2 a_3 + a_3^2$$

dir.

Böylece her i indisi için terimler seçilecektir.

İlerideki çalışmalara ışık tutmak bakımından permeabiliteyi buraya kadar yapılan hesaplamalarda z nin fonksiyonu olarak aldık. Ancak tezimizde iletken vasatlarla meşgul olduğumuz için permeabilitenin sabit olduğunu kabul edebiliriz.

$$\mu = \mu_0 \quad \text{[III - 6.10]}$$

(sabit) olsun.

$$\frac{d\mu}{dz} = 0$$

olacaktır.

Buna göre, [III - 6.9] denklemleri aşağıdaki şekilde olacaklardır.

$$\frac{d\mu}{dz} = 0 \quad \text{olduğundan, } r_1 = 0$$

olacaktır.

$$-2a_2 = i\omega\mu_0\sigma + \omega^2\mu_0\varepsilon$$

$$\dot{a}_2 - 2a_3 = 0$$

$$a_i - 2a_{i+1} - (a_2a_{i-1} + a_3a_{i-2} + \dots + a_{i-1}a_2) = 0$$

$$-2\left(r_2 - \frac{1}{2}jb_1\right) = i\omega\mu_0\sigma + \omega^2\mu_0\varepsilon$$

$$\dot{r}_2 - \frac{1}{2}j\dot{b}_1 = 2\left(r_3 - \frac{1}{2}jb_2\right) \quad \text{[III - 6.11]}$$

$$\dot{r}_i - \frac{1}{2}j\dot{b}_{i-1} = 2a_{i+1} - (a_2a_{i-1} + a_3a_{i-2} + \dots + a_{i-1}a_2)$$

$$i = 3, 4, 5 \dots$$

[III - 6.11] formülünü ele alalım.

$$-2r_2 + jb_1 = j\omega\mu_0[\sigma(\omega, z) - j\varepsilon(\omega, z)]$$

$$2r_2 - jb_1 = -j\omega\mu_0\sigma - \mu_0\omega^2\varepsilon$$

buradan,

$$2r_2 = -\mu_0\omega^2\varepsilon \quad \text{[III-6.12]}$$

$$b_1 = \mu_0\omega\sigma \quad \text{[III-6.13]}$$

bulunur.

III-7. Satıhta yapılan ölçüler sonunda derinlik ve açılal hızın fonksiyonları olan dielektrik ve iletkenlik parametrelerinin bulunması

Bundan önceki paragrafta

$$2r_2 = -\mu_0\omega^2\varepsilon$$

ve

$$b_1 = \mu_0\omega\sigma$$

formüllerini çıkarmıştık.

Eğer,

$$r_2 = r_2(\omega, z)$$

ve

$$b_1 = b_1(\omega, z)$$

fonksiyonlarının z değişken ve ω seçilmiş açılal frekans olduğuna göre,

$$z = h$$

civarında seriye açarsak.

$$r_2 = r_2(\omega, h) + \frac{r_2'(\omega, h)}{1!} (z-h) + \frac{r_2''(\omega, h)}{2!} (z-h)^2 + \dots$$

ve

$$b_1 = b_1(\omega, h) + \frac{b_1'(\omega, h)}{1!} (z-h) + \frac{b_1''(\omega, h)}{2!} (z-h)^2 + \dots$$

bunları yukarıdaki [III-6.12-6.13] denkleminde yerlerine koyacak olursak,

$$\omega \varepsilon = \frac{2}{\mu_0} \left[r_2(\omega, h) + \frac{r_2'(\omega, h)}{1!} (z-h) + \frac{r_2''(\omega, h)}{2!} (z-h)^2 + \dots \right] \quad [\text{III-7.1}]$$

ve

$$\sigma = \frac{1}{\mu_0} \left[b_1(\omega, h) + \frac{b_1'(\omega, h)}{1!} (z-h) + \frac{b_1''(\omega, h)}{2!} (z-h)^2 + \dots \right] \quad [\text{III-7.2}]$$

bulunur.

b_i ve r_i ler $z = h_1$ de bilinmektedirler. Bu takdirde, Bölüm III paragraf 6 daki [III-6.11] formülü vasıtasıyla de b_i ve r_i lerin her mertebeden türevlerinin bulunabileceği görülmektedir.

Böyle olunca,

$\omega \varepsilon$

ve

σ

Parametreleri de satıhta yapılan ölçüler sonunda bilinmiş olacaklardır.

III-8 Karakteristik grafiğin teşkili

Burada [II-3.1] deki diyagramatik özelliğin bir tatbikatını vermekle yetineceğiz.

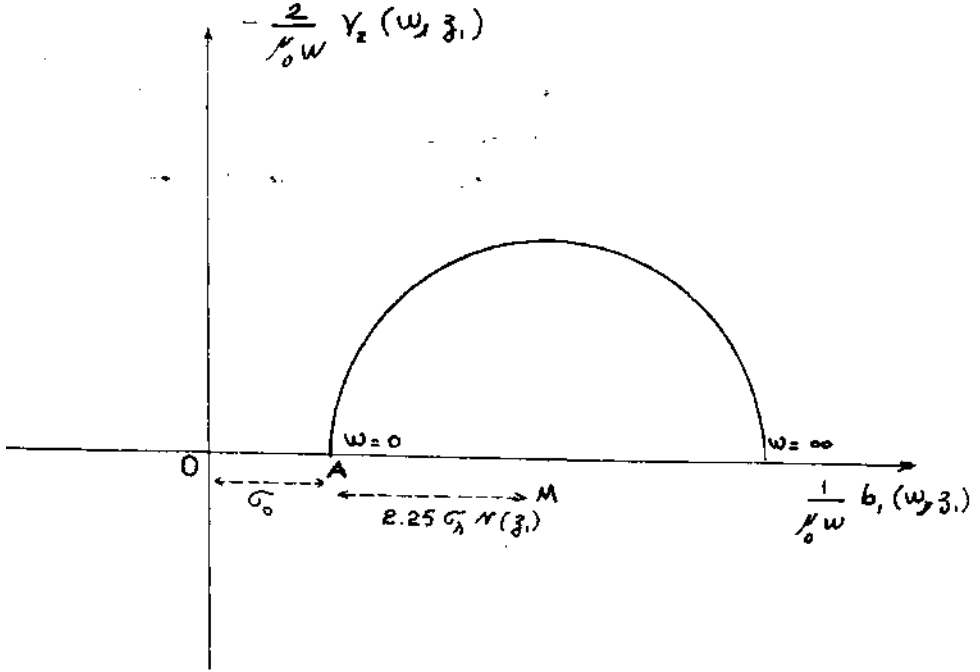
Eğer karteziyen koordinatlarda eksenleri

$$\frac{1}{\mu_0 \omega} b_1(\omega, z_1)$$

ve

$$\frac{2}{\mu_0 \omega} r_2(\omega, z_1)$$

olan ve iki büyüklük arasındaki bağıntıyı veren grafiği çizecek olursak, bu bir yarı çember olacaktır. Burada z_1 derinlik koordinatının belirli bir değeridir (Şek. 16).



Şek. 16

III-9. Doğru akım iletkenliğinin tayini.

Açısal frekansın mümkün ve muhtelif sonlu sayıdaki değerleri için sahada yapılan H_r ve H_z ölçülerinden, $r_2(\omega, z_1)$ ve $b_1(\omega, z_1)$ değerleri bulunur. Bu noktalar karteziyen koordinatlarda eksenler $\frac{1}{\mu_0 \omega} b_1(\omega, z_1)$ ve $-\frac{2}{\mu_0 \omega} r_2(\omega, z_1)$ olmak üzere konursa, Şek. 16 analitik münasebeti esas alınarak bu noktalar enterpole edilmek suretiyle eğrinin apsis eksenini kesim noktası bulunur. Böylece doğru akım iletkenliği tayin edilmiş olur.

Bununla tatbiki jeofizikteki kontakt polarizasyonu problemini halletmiş olmaktadır.

III-10. Birim hacimdeki iletken partikül sayısı ile ilgili büyüklüğün tayini

Açısal frekansın mümkün ve muhtelif sonlu sayıdaki değerleri için sahada yapılan H_r ve H_z ölçülerinden $r_2(\omega, z_1)$ ve $b_1(\omega, z_1)$ değerleri bulunur.

Bu noktalar, karteziyen koordinatlarda eksenler, $\frac{1}{\mu_0 \omega} b_1(\omega, z_1)$

ve $-\frac{2}{\mu_0 \omega} r_2(\omega, z_1)$

olmak üzere,

konursa, Şek. 16 analitik münasebeti esas alınarak bu noktalar enterpole edilmek suretiyle meydana gelecek çemberin yarıçapı

$$\overline{AM} = 2.25 \sigma_s v(z_1)$$

olacaktır.

Böylece iletken vasata ait birim hacimdeki iletken partikül sayısı ile orantılı bir büyüklük bulunmuş oluruz.

Tatbikî jeofizikte iletken partikül sayısı ile ilgili bir parametrenin ele alınması ve tayin edilmesi ilk olarak bu tezde mümkün olmuştur.

III-11. Netice

III üncü Bölüm, II inci Bölümün, bir tatbikî jeofizik problemine uygulanması olmuştur.

Burada iki tabaka problemi ele alınmış ve dielektrik zarla kaplı iletken partiküllerden ibaret bir ortama ait elde edilen analitik ifadelerden Bölüm II paragraf 3 Şek. 14 teki yan çemberin tersim edilebileceği gösterilmiştir.

Bu çok enteresan münasebet, iletken zona ait herhangi bir derinlikteki:

1) Doğru akım iletkenliği ve

2) İletken partikül sayısı ile ilgili büyüklüklerin grafik metotla ortaya konmasını sağlamıştır.

Böylece tatbikî jeofiziğin önemli iki probleminin, ilk olarak bu tezde, çözümleri verilmiştir.

Neşre verildiği tarih 4 mart, 1969

Referanslar

- 1 — «Inverse boundary - value » Problem in electrodynamics. *Physics*, Dec. 1933.
- 2 — STRATTON, J. A. (1941) : Electromagnetic theory.
- 3 — SLICHTER, L. B. (1951) : *Geophysics*.
- 4 — WATSON, G. N. (1958) : A treatise on the theory of Bessel functions. *Cambridge, at the University Press*.
- 5 — WHITTAKER, E. T. (1940) : A course of modern analysis. *Cambridge, at the University Press*.

GENEL BİBLİYOGRAFYA

- 1 — *Physics*, Dec. 1933
- 2 — *Geophysics*, 1951, vol. XVI, July 1951, no. 3.
- 3 — R. F. HARRINGTON: Time - harmonic electromagnetic fields, 1961.
- 4 — A. R. VON HEPPEL : Dielectric materials and applications, 1954-
- 5 — *Journal of Applied Physics*, v. 23, no. 12, Dec. 1952.
- 6 — *Journal of Applied Physics*, v. 28, no. 3, March 1957-
- 7 — M. A. BIOT: *Journal of Applied Physics*, v. 28, no. 12, Dec. 1957.
- 8 — H. H. READ : Rutley's Elements of mineralogy.
- 9 — G. GOUDET : Les fonctions de Bessel.
- 10 — F. SEITZ : The modern theory of solids.

- 11 — T. R. MADDEN & D. J. MARSHALL: induced polarization. A study of its causes and magnitudes in geologic materials. June 1959.
- 12 — K. STIEFLER : *The Proceedings of the Physical Society*, v. 7, pt. 3, no. 459.
- 13 — E. H. GRANT : *The Proceedings of the Physical Society*, v. 70, pt. 10, Oct. 1957 no. 454, B.
- 14 — V. I. LITTLE : *The Proceedings of the Physical Society*, v. 68, pt. 6, June 1955, no. 426, B.
- 15 — J. V. L. PARRY : *The Proceedings of the Physical Society*, v. 68, pt. 7, July, 1955, no. 427.
- 16 — J. A. REYNOLDS & J. M. HOUGH : *the Proceedings of the Physical Society*, v. 68, August 1957, no. 452 B.
- 17 — V. I. LITTLE; V. SMITH, & F. C. ROESLER : *The Proceedings of the Physical Society*, v. 68, pt. 2, Feb. 1955, no. 422 B.
- 18 — *The Proceedings of the Physical Society*, v. 68, pt. 3, March 1955, no. 423 B.
- 19 — *The Proceedings of the Physical Society*, v. 17, pt. 1, January 1953, 11. 547.
- 20 — J. A. STRATTON : Electromagnetic theory, 1941.
- 21 — A. R. V. HEPPEL: Dielectrics and waves, 1954.
- 22 — H. BATEMAN : The mathematical analysis of electrical and optical waves - motion.
- 23 — P. M. MORSE & H. FESHBACH : Methods of theoretical physics. Part I, II, 1953.
- 24 — A. SOMMERFELD : Partial differential equations in physics, 1949.
- 25 — J. R. WAIT : Overvoltage research and geophysical applications, 1959.
- 26 — H. FRÖHLICH : Theory of dielectrics, 1949.
- 27 — Note on cavity perturbation theory. *Journal of Applied Physics*, 1957.
- 28 — A transient method for measurement of dielectric polarization.
- 29 — Eddy - current method for measuring the resistivity of metals. *Journal of Applied Physics*, 1959.
- 30 — PETERS & STANDLEY : The Dielectric behaviour of magnesium, manganese, ferrite. *Proceedings of the Physical Soc.*, 1958.
- 31 — F. A. GRANT : Use of complex conductivity in the representation of dielectric phenomena. *Journal of Applied Physics*, 1958.
- 32 — A. G. WEBSTER : Partial differential equations of mathematical physics, 1955.
- 33 — L. RAYLEIGH : The theory of sound, v. 11.
- 34 — M. MASON : The electromagnetic field.
- 35 — R. M. FANO : Electromagnetic fields, energy and forces, 1960.
- 36 — E. T. WHITTAKER : A course of modern analysis, 1940.
- 37 — G. N. WATSON : A treatise on the theory of Bessel functions, 1958.
- 38 — J. R. JOHLER & C. M. LILLEY : Ground - conductivity determinations at low radio frequencies by an analysis of the spheric signatures of thunderstorms. *Journal of Geophysical Research*, v. 66, no. 10, Oct. 1961.
- 39 — Field Theory, 1958.
- 40 — A. SOMMERFELD : Wave mechanics.
- 41 — J. FOURIER : Analytical theory of heat.
- 42 — K. KNOPP & NAZIM TERZİOĞLU : Fonksiyonlar teorisi.

- 43 — C. J. DE LA VALLEE POUSSIN- RATİP BERKER : Analiz dersleri.
- 44 — Maden Tetkik ve Arama Enstitüsünce Bilinen Maden Zuhurları Fihristi. *M.T.A. Yayınl.*, no. 113, 1963.
- 45 — *Symposium on Chrome Ore*, September, 1960.
- 46 — G. v. d. KAADEN: Türkiye'deki bakır-çinko-kurşun yatakları. *M.T.A. raporlarından.*
- 47 — S. KAVLAKOĞLU : Lahanos civarı elektromanyetik raporu.
- 48 —————: Anamur civarı elektromanyetik raporu. *M.T.A. Enstitüsü Arşivi.*
- 49 —————: Sonsuz doğrusal bir tel boyunca geçen sinizoidal akım muvacehesinde elektromanyetik prospeksiyon. (*Jeofizik Sosyetesı Kongresinde peyper olarak verilmiştir.* 1960.)