MTA Dergisi 112,135-140.1991

NOKTA KÜTLE ÇİFTİ KAVRAMI ÜZERİNDE SCHRÖDİNGER DALGA DENKLEMİ TARTIŞMASI

Sırrı KAVLAKOĞLU *

ÖZ.- Bilindiği gibi, ışık yayılmasının hem dalga hem de kuantum özelliği vardır. Kuantum özelliğinden dolayı, gerekli olduğunda bir nokta kütlesi olarak düşünülebilir. Işığın dalga özellikleri, Maxwell dalga denklemleri ile ve nokta kütle özellikleri de Schrödinger dalga denklemi ile araştırılmıştır. Bu makalenin amacı, ışığın bu iki özelliğinde aynı bir denklem ile ele alınabileceğini gösterebilmektir. Bu amacı kavramak için "uzatılmış Maxwell denklem sistemi (extended Maxwell equation system)" önerilmiş ve bu sistemin, kabul edilebilen limitlerde Schrödinger dalga denkleminin çıkarılabileceği hesaplayıcı (skalar) dalga denkleminin (Scalar wave equation) ve her iki elektromanyetik dalga denklemlerini içine alabileceği gösterilmiştir. Böylece elektrik alan vektörü ve manyetik alan vektörü arasındaki MaxweU'in uzatılmış denklem sistemindeki mevcut simetri, Schrödinger dalga denklemindeki iki parametrenin (skala) $\nabla\psi$ ve $\nabla\varphi$ nin dalga önü yüzey normalleri arasında da oluştuğu onaya konmuş olur. Schrödinger dalga denklem çifti katsayılarının farklı olabilmesinden dolayı, bu birbirine dik olan iki dalga önü yüzeyinin beraberinde olduğu iki farklı nokta kütlesinin varlığını kabul etmek mümkün olmaktadır.

GİRİŞ

Maxwell denklem sistemi, elektromanyetik alanların araştırılmasına en etkili şekilde cevap bulabilmektedir (Straton, 1941). Işığın elektromanyetik dalga özellikleri ile ilgili araştırma bu denklemlerle yapılabilir (Bateman, 1955). Ama ışığın ışık-kuantum özelliklerinin bir direkt araştırması Maxwell denklem sistemleri ile ancak yapılabilir yalnız her noktanın ve eğrilerin kavramını tek tek tanıttıktan sonra, ışığın elektron modeli Maxwell denklem sistemleri ile yapılabilir (Bateman, 1955).

Bilindiği gibi ışığın nokta kütle-dalga özellikleri Schrödinger dalga-denklemini kullanarak araştırılabilmektedir (Sommerfeld, 1928).

Işık olayları nokta kütle-dalga olayları ve ayrıca elektromanyetik dalga olaylarına sahiptirler. Bu yüzden ışık olaylarının bir denklem sistemi çerçevesinde incelenmesinin ilginç olacağı düşünülmüştür. Bu amaca ulaşmak için Maxwell denklem sistemini denemek iyi bir yanaşım olarak düşünülmüştür.

Ilk adım olarak, Maxwell denklem sisteminin içeriğinin Helmholtz teoremini (Phillips, 1933) kullanma ile genişletebilmek ile olmuştur, ikinci olarak, uzatma durumunun skalar dalga fonksiyonu, Schrödinger dalga denklemini sağlamaktadır. Schrödinger dalga denklem çifti katsayılarının farklı değerler alması yüzünden, iki ortogonal yüzeye bağlı birbirinden farklı iki nokta kütlesi olması gereklidir. Bu yüzden herhangi bir ışın yayılması durumunda nokta kütle çifti kavramı ciddî bir kavram şeklinde düşünülmelidir.

Böylece önerilen uzatılan Maxwell denklem sistemi kullanılarak, elektromanyetik dalga olaylarını, ilişkili olduğu nokta kütle-dalga olayları ile beraber araştırmak mümkün olmuştur. Bu yol ile elektrik alan yoğunluk vektörü ve manyetik alan yoğunluk vektörü arasında, ayrıca sistemin skalar dalga denkleminin $\nabla\psi$ ve $\nabla\varphi$ lerinin dalga yüzey normalleri arasında oluşan Maxwell simetrisi ispatlanmıştır.

Bundan dolayı iki ortogonal yüzey, y ve (p ile ilişkili ayrı bir nokta kütle kavramı kabul edilebilir.

TEORİ -UZATILMIŞ MAXWELL DENKLEM SİSTEMİ

Maxwell denklem sistemi (Bateman, 1955):

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \qquad \nabla . H = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla \times H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \qquad \nabla . E = 0$$

* Maden Tetkik ve Arama Genel Müdürlüğü, Jeofizik Dairesi, Ankara.

E : elektrik alan yoğunluk vektörü,
H : manyetik alan yoğunluk vektörü,
c : ışığın hızı,
t : zaman,
E ve H aşağıdaki gibi farz edilmektedir;

$$E = E_0(x, y, z)e^{i\omega t}$$
$$H = H_0(x, y, z)e^{i\omega t} \tag{2}$$

Burada (w) açısal hız olup, (x, y, z) ler kartezyen (cartesion) koordinatlarıdır. Helmoltz teoremine göre F gibi bir vektör, bir selenoidal ve bir irrotasyonal vektörlerin toplamı şeklinde ifade edilebilip şöyle yazılabilir;

$$F = -\nabla\psi + \nabla X A \tag{3}$$

(ψ) skalar ve (A) vektörüyle fonksiyonları zaman fonksiyonları olup,

$$\psi = \psi_0(x, y, z)\, e^{i\omega t} \qquad A = A_0\ (x, y, z)\, e^{i\omega t}$$

Matematiksel olarak aşağıdaki denklem Helmoltz teoremine göre;

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \nabla X H$$

aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla\psi + \nabla X H \tag{4}$$

veya;

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(E - i\frac{c}{\omega}\nabla\psi\right) = \nabla X H \tag{5}$$

Aşağıdaki kabulü yaparsak;

$$S = E - i\frac{c}{\omega}\nabla\psi$$

Bu şanlar altmda, uzatılmış Maxwell denklem sistemi (1), belirlenmiş ve matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\begin{aligned} \nabla X S &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} & \nabla . H &= 0 \\ \nabla X H &= \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} & \nabla . S &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Bu makalede, denklem sistemi (6), uzatılmış Maxwell denklem sistemi (extended Maxwell equation system) olarak adlandırılmaktadır;

MAXWELL DENKLEM SİSTEMİNİN FiZiKSEL ANLAMI

Aşağıdaki dalga denklemleri, (6) rumuzlu denklemlerden kolayca aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\nabla^2 S - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$
$$\nabla^2 H - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \qquad (7)$$

Bunlardan;

$$\nabla^2 S_0 + \frac{\omega^2}{c^2} S_0 = 0 \qquad (8)$$

$$\nabla^2 H_0 + \frac{\omega^2}{c^2} H_0 = 0 \qquad (9)$$

Diferansiyel (farklılık) denklemleri yazılabilir.

$S_0 = E_0 - i\frac{c}{\omega}\nabla\Psi_0$ olmasından dolayı **(E_0, Ψ_0 reeldir)** ve (8) de ki yerine konduğunda;

$$\nabla^2 (E_0 - i\frac{c}{\omega}\nabla\Psi_0) + \frac{\omega^2}{c^2}\left[\nabla^2(\nabla\Psi_0) + \frac{\omega^2}{c^2}\nabla\Psi_0\right] = 0$$

elde edilir.

Bu denklemde reel ve kuramsal değerleri ayırırsak aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir;

$$\nabla^2 E_0 + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 - i\frac{c}{\omega}\left[\nabla^2(\nabla\Psi_0) + \frac{\omega^2}{c^2}\nabla\Psi_0\right] = 0 \qquad (10)$$

Çözümünü bulmak için, bunlar şöyle yazılır;

$$\nabla^2 E_0 + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 = 0$$

$\nabla^2 + (\nabla\Psi_0) + \frac{\omega^2}{c^2}\nabla\Psi_0 = 0$ **şeklinde yazılır.**

Bu yüzden (6) denklem sisteminin çözümü, aşağıdaki yazılı üç diferansiyel denklem çözümüne indirgenir;

$$\nabla^2 E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \qquad (11)$$

$$\nabla^2 H + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \qquad (12)$$

$$\nabla^2(\nabla\psi) + \frac{\omega^2}{c^2}\nabla\psi = 0 \qquad (13)$$

(13) rumuzlu denklem uzatılmış Maxwell denklem sisteminin (extended Maxwell equation system) bir parçasıdır.

(l 1) ve (12) denklemleri yüzünden, (1) ve (6) denklem sistemleri elektromanyetik dalga yayılmasının tüm özelliklerine sahiptirler, ilâveten (6) denklem sistemi bir skalar (ψ) fonksiyon içermektedir.

(ψ) in özelliklerini açıklamak için, (13) diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi yazılır;

$$\nabla(\nabla^2\psi + \frac{\omega^2}{c^2}\psi) = 0$$

Bundan

$$\nabla^2\psi + \frac{\omega^2}{c^2}\psi = l$$

(l) bir integrasyon sabitidir.

Son bahsedilen eşitlik aşağıdaki gibi de yazılabilir;

$$\nabla^2\psi + (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l}{\psi})\psi = 0 \qquad (14)$$

$l \neq 0$ farzedelim ve,

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l}{\psi} = \frac{\omega^2}{a^2} \qquad (15)$$

Bu şartlar altında denklem (14) aşağıdaki şekle dönüşecektir.

$$\nabla^2\psi + \frac{\omega^2}{a^2}\psi = 0 \qquad (16)$$

"a" hız fazıdır ve (15) teki durumunda yer fonksiyonudur (funcüon of position).

$\frac{\omega}{a} = k, \frac{c}{a} = n$ **ve $k = k_0 n$ değerlerini koyalım.**

Burada (k) dalga sayısı olup, (n) ise alanın (boşluğun) kırılma indeksidir. Daha sonra denklem (16) aşağıdaki şekle dönüşür;

$$\nabla^2\psi + n^2 k_0^2 \psi = 0 \qquad (17)$$

(n^2) nin özelliklerini araşturmak için

$\psi = B\, e^{i\ k0\ T}$ olduğunu farz edelim.

(B) ve (T), (x,y,z) kartezyen (cartesian) koordinatlarının fonksiyonlarıdır. Bu durumda

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 = \Delta\, T_1$$

Bu Hamilton diferansiyel denklemidir (Sommerfeld, 1928).

Burada

$$\Delta\, T_1 = n^2 \quad \text{ve}$$

öte taraftan $\Delta\, T_1$ in değeri

$$\Delta\, T_1 = 2m \left[e - U\,(x,y,z) \right]$$

Burada "m", nokta kütle; "e", enerji sabiti ve "U" ise potansiyel enerjidir.

Daha sonra diferansiyel denklem aşağıdaki şekle dönüşür;

$$\nabla^2 \psi + 2m\,(e - U)\, k_0^{\,2}\, \psi = 0$$

veya

$$\nabla^2 \psi + 2m\,(e - U) \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \psi = 0$$

"h" Planck sabiti (Sommerfeld, 1928). Bu Schrödinger'in çok iyi bilmen dalga denklemidir.

Daha önce belirtildiği gibi (6) denklemindeki **(ψ)** fonksiyonu, Schrödinger dalga denklemini doğrulamaktadır.

Bu yüzden ışığın dalga, nokta kütle-dalga özellikleri gibi durumlarının araştırılmasını, uzatılmış Maxwell denklemini kullanarak yapmak mümkün olmaktadır.

öte yandan $\dfrac{1 \quad W}{c \quad \backslash|/t}$ alanında benzer işlemler yapılırsa, bir dalga önü **(φ)** fonksiyonu ortogonalden dalga önü fonksiyonu **(ψ)** ile belirtilecektir. Böylece, bu fonsiyonlarla birlikte olan iki farklı nokta kütlelerinin varlığını ortaya koymak mümkün olacaktır.

Yayına verildiği tarih, 11 Mayıs 1990

DEĞİNİLEN BELGELER

Bateman, H.,1955, The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion: Cambridge University Press.

Phillips, H.B., 1933 Vector Analysis: Cambridge.

Sommerfeld, A., 1928, Wave Mechanics: E.P. Button and Company Inc., New-York.

Slraton, J.A., 1941, Elektromagnetik theory: McGraw-Hül Book Company, Inc., New York.